<u>Exercício</u> Seja R uma k-algebra f.g. sobre um corpo k e $P \subset R$ um ideal primo. Assim existe um domínio Noetheriano normal $R(P) \subset R$ tal que extensão $R(P) \subset R/P$ é finito.

[É aplicação de Noether Normalization].

<u>Lema</u>: Seja $R \subset R'$ uma extensão integral e R uma k-algebra f.g. Suponha que $P_1' \subsetneq P_3'$ são primos em R' t.q. $R \cap P_1' = P_1$ e $R \cap P_3' = P_3$

$$
\begin{tikzcd}
R': & P_1' \arrow[d] & \subseteq & P_2' & \subseteq & P_3' \arrow[d] \\
R: & P_1 & \subseteq & P_2 & \subseteq & P_3
\end{tikzcd}
$$

Se existe P_2 primo em R', com $P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3$ assim existe P_2' em R' com $P_1' \subseteq P_2' \subseteq P_3'$.

<u>Prova</u>. Temos que existe um domínio $R(P_1)$ com $R(P_1) \subset R/P_1$ finito. Observe que os ideais

$$0, \quad P_2/P_1 \cap R(P_1), \quad P_3'/P_1 \cap R(P_1)$$

são diferentes (dois a dois). Extensão $R(P_1) \subset R'/P_1'$ é integral, com $R(P_1)$ normal, assim, aplicando <u>Going down</u>, temos que existe ideal primo não nulo. $\overline{P_2'}$ em R'/P_1', $\overline{P_2'} \subset P_3'/P_1'$ tal que

$$\overline{P_2'} \cap R(P_1) = P_2 \cap R(P_1)$$

Assim $\overline{P_2} \subsetneq P_3'/P_1'$. Mas isso implica que existencia de primo P_2' com

$$P_1' \subseteq P_2' \subseteq P_3'.$$

$\square$