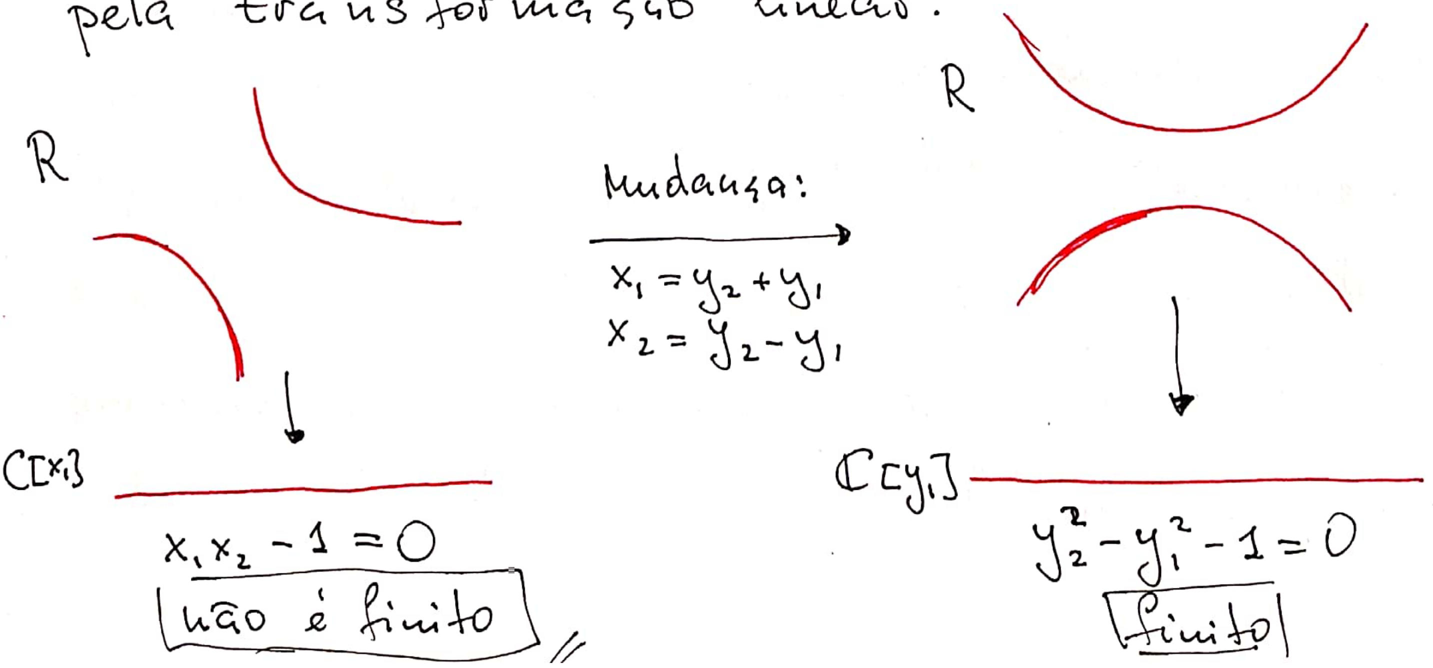
Aula 21

Normalização de Noether

Hoje vamos provar que q.q. algebra R finitamente gerada sobre um corpo K (em particular $R = A(X)$ - algebra das funções polinomiais numa variedade X) é extensão finita de $K[x_1, \dots, x_r]$.

Idea de Noether Normalization

Seja $R = \dfrac{\mathbb{C}[x_1, x_2]}{(x_1 x_2 - 1)}$ - anel das coordenadas da variedade $V(x_1 x_2 - 1) = X \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. R não é integral (assim não é finito) sobre $\mathbb{C}[x_1]$, pois não satisfaz "Lying Over". Mas podemos "arrumar" isso pela transformação linear:



Assim estrategia é: encontrar uma mudança das coordenadas boa, de modo que a "relação" entre variaveis seja monica.

Vamos precisar 2 lemas para provar Noeth. Normalization.

Lema 1 Seja $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ um polinomio não-nulo sobre corpo infinito K. Suponha que f é homogeneo, isto é todo monomio tem o mesmo grau. Assim, existem $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ com

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0.$$

Prova [Pelo indução por n].

Caso $n=1$ é claro, pois f é multiplo de um monomio. Assim suponha $n>1$ e escreva f como

$f = \sum_{i=0}^{d} f_i x_1^i$, com $f_i \in K[x_2, \dots, x_n]$ são homogeneos de grau $d-i$. Como f é não-nulo, assim pelo menos um f_i não-nulo. Por indução temos $f_i(a_2, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$ para alguns $a_2, \dots, a_{n-1}$

Assim $f(\cdot, a_2, \dots, a_{n-1}, 1) \in K[x_1]$ não nulo e portanto tem numero finito de zeros. Como K é infinito $\Rightarrow$ há a_1 tal que $f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$.

$\square$

Lema 2 Seja $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ um polinomio não-nulo sobre um corpo infinito K. Assim existem: $\lambda \in K$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ tal que

$$\lambda f(y_1 + a_1 y_n, y_2 + a_2 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n)$$

é monico em y_n, isto é um elemento de $R[y_n]$ com $R = K[y_1, \dots, y_{n-1}]$.

Prova Seja $d = \text{grau } f$, escreva $f = \sum_{k_1, \dots, k_n} c_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, com $c_{k_1, \dots, k_n} \in K$, assim

$$\lambda f(y_1 + a_1 y_n, y_2 + a_2 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n)$$
$$= \lambda \sum_{k_1, \dots, k_n} c_{k_1, \dots, k_n} (y_1 + a_1 y_n)^{k_1} \cdots (y_{n-1} + a_{n-1} y_n)^{k_{n-1}} \cdot y_n^{k_n}$$

Assim o termo em y_n igual a

$$\lambda \cdot \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ k_1 + \dots + k_n = d}} c_{k_1, \dots, k_n} a_1^{k_1} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot y_n^{k_1 + \dots + k_n} = \lambda f_d(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) y_n^d$$

Com f_d é parte homegeneo da grau d. Agora escolha $a_1, \dots, a_{n-1}$ pelo Lema 1, para $f_d(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) = 1$, e define $\lambda = f_d(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)^{-1}$. $\square$.

Ex. (p/ casa). Seja $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ polinomio não-nulo sobre corpo arbitrario K. Mostre que existem $\lambda \in K$, e $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda f(y_1 + y_n^{a_1}, y_2 + y_n^{a_2}, \dots, y_{n-1} + y_n^{a_{n-1}}, y_n)$$

é monico em y_n.

Proposição [Normalização de Noether].

Seja R uma algebra finitamente gerada sobre um corpo K com geradores $x_1, \dots, x_n \in R$. Assim existe um homomorfismo injetivo de K-algebra $K[z_1, \dots, z_r] \longrightarrow R$, e R é extensão finita de $K[z_1, \dots, z_r]$.

Alem disso, se K é infinito, assim as imagens de $z_1, \dots, z_r$ em R podem ser escolhidas como combinações K-lineares de $x_1, \dots, x_n$.

Prova. [Indução por numero dos geradores n de R]

Caso $n=0$ é trivial, fazendo escolha $r=0$.

Suponha $n>0$. Vamos considerar 2 casos:

(a) ~~Não~~ Existe relação algebrica entre $x_1, \dots, x_n \in R$, isto é não- existe polinomino não-nulo f sobre K, com $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Neste caso podemos pegar $r=n$ e aplicação $K[z_1, \dots, z_n] \longrightarrow R$ dada por $z_i \longmapsto x_i$ que é um isomorfismo

(b) existe polinomio não-nulo f sobre K tal que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Assim escolha λ e $a_1, \dots, a_{n-1}$ como em Lema 2 ou Ex. acima e define:

$$y_1 := x_1 - a_1 x_n, \dots, y_{n-1} := x_{n-1} - a_{n-1} x_n, \quad y_n := x_n$$

ou $$y_1 := x_1 - x_n^{a_1}, \dots, y_{n-1} := x_{n-1} - x_n^{a_{n-1}}, \quad y_n := x_n$$

respectivamente. Em ambos os casos temos que K-subalgebra $K[y_1, \dots, y_n]$ de R gerada por $y_1, \dots, y_n \in R$ é mesma como gerada por $x_1, \dots, x_n$ e igual R.

Alem disso y_n é integral sobre K-subalgebra $K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ de R, pois

$\lambda f(y_1 + a_1 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n)$ ou

$\lambda f(y_1 + y_n^{a_1}, \dots, y_{n-1} + y_n^{a_{n-1}}, y_n)$ respectivamente

é monico em y_n e igual ao $\lambda f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Assim $R = K[y_1, \dots, y_n]$ é finito sobre $K[y_1, \dots, y_{n-1}]$. Em adicional $K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ é finito sobre $K[z_1, \dots, z_r]$ pelo hipotese, assim R é finito sobre $K[z_1, \dots, z_r]$ (Aula 18).

Alem disso, se K é infinito, assim Lema 2 vale e y_i's são combinações lineares de x_i's. ☒

<u>Obs.</u> Seja $R = A(X)$ anel das coordenadas da varied. X.

Na prop. acima as imagens $z_1, \dots, z_r$ são funções alg. independentes em X, e todo elemento de R alg. dependende de $z_1, \dots, z_r$ atraves relação monica. Assim podemos pensar "r" como "numero dos parametros" para descrever o X. Vamos definir isso explicitamente nas aulas que vem.

Hilbert Nullstellensatz

Uma aplicação importante da normalização de Noether é Hilbert Nullstellensatz (Teorema de zeros) que estabilize a correspondencia entre (pr corpo $k=\bar{k}$)

$$\left\{\begin{matrix}\text{ideais maximais}\\ \text{em } A(X)\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{matrix}\text{pontos em}\\ X\end{matrix}\right\}.$$

Hilbert Nullstellensatz (versão 1)

Seja K um corpo e R uma K-algebra finitam. gerada que é um corpo tmb.

Assim $K \subset R$ é uma extensão finita de corpos

Se $k=\bar{k} \Rightarrow R=k$.

Prova Pelo Noether Normalization R é extensão finita sobre $k[z_1,\dots,z_r]$ e portanto é integral sobre $k[z_1,\dots,z_r]$, mas R é corpo assim $k[z_1,\dots,z_r]$ é corpo tmb (Aula 18), $\Rightarrow r=0$. e R é finito sobre k.

Se $k=\bar{k} \Rightarrow$ não há extensão algebrica de corpos de K. Assim não há extensão finita neste caso e $R=K$. ☒

Hilbert Nullstellensatz (versão 2).

Seja k um corpo algebricamente fechado. Assim ideais maximais do $k[x_1, \dots, x_n]$ tem forma

$$I(a) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

para algum $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k$.

__Prova__ Seja $P \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal maximal. Assim $k[x_1, \dots, x_n]/P$ é um corpo, e uma k-algebra finitamente gerada. Assim $\frac{k[x_1, \dots, x_n]}{P} = k$ pelo __HN1__, i.e. a mapa natural

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{P} \\ c &\longmapsto \bar{c} \end{aligned} \quad \text{é isomorfismo.}$$

Pegundo images inversas $a_1, \dots, a_n$ de $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ temos $\bar{x}_i = \bar{a}_i$

$\Rightarrow (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset P$. Mas $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ é ideal maximal, assim

$$P = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = I(a) \quad \blacksquare$$

__Obs.__ Assim, se $k = \bar{k}$, $R = A(X)$, com $X \subset \mathbb{A}^n_k$, temos

$$\begin{aligned} \{\text{pontos de } X\} &\xleftrightarrow{1:1} \{\text{ideais maximais em } A(X)\} \\ a &\longmapsto I(a) \\ V(I) &\longleftarrow I \end{aligned}$$

Hilbert Nullstellensatz (versão 3)

Seja $I \triangleleft R$ um ideal numa K-algebra finit. gerada, assim:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P\text{-maximal} \\ P \supset I}} P$$

Prova Todo ideal maximal é primo $\Rightarrow$ "$\subset$" segue-se.

"$\supset$": Seja $f \in R$ com $f \notin \sqrt{I}$, vamos encontrar ideal maximal $P \supset I$ com $f \notin P$. Considere o conjunto multiplicamente fechado $S = \{ f^n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Como $f \notin \sqrt{I}$ implique $I \cap S = \emptyset$, assim existe ideal primo com $P \supset I$ e $P \cap S = \emptyset$ [e com $f \notin P$], e $S^{-1}P$ é maximal. Vamos mostrar que P é maximal.

Considere extensão: $K \longrightarrow R/P \longrightarrow (R/P)_f = R_f/P_f$

inclusão

corpo.

localização em S

$\Rightarrow K \subset R_f/P_f$ extensão finita de corpos.

e portanto integral.

$\Rightarrow R/P \subset R_f/P_f$ extensão integral

$\Rightarrow R/P$ é corpo (Aula 18)

$\Rightarrow P$ é maximal $\boxtimes$

Hilbert Nullstellensatz (versão 4).

Seja $X \subset \mathbb{A}^n_k$ uma variedade com $k = \bar{k}$.

Assim p/ todo ideal $I \lhd A(X)$ temos $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Em particular, existe a correspondência

$$\{\text{Subvariedades } X\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{ideais radicais em } A(X)\}$$

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} Y & \longmapsto & I(Y) \\ V(I) & \longleftarrow\!\shortmid & I. \end{array}$$

Prova Vamos provar que $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

"$\subset$": Suponha que $f \notin \sqrt{I}$, Assim pelo HN, v.3 existe ideal maximal $P \lhd A(X)$ com $P \supset I$ e $f \notin P$.

Mas P tem forma $I(a) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ para algum ponto $a \in X$. Agora $I(a) \supset I$ implique $a \in V(I)$ e $f \notin I(a)$ implique $f(a) \neq 0$.

Assim $f \notin I(V(I))$.

"$\supset$" Seja $f \in \sqrt{I}$, isto é $f^n \in I$ para algum n. Assim $(f(a))^n = 0 \Rightarrow f(a) = 0$ para todos $a \in V(I)$

$\Rightarrow f \in I(V(I))$.

Agora afirmação sobre a correspondência é claro pois as mapas $(*)$ são bem-definidas e inversas um par outra $\blacksquare$