Aula 20

Extenções integrais 2.

Lembrete:

- Se $R \subset R'$ dois aneis, assim R' é chamado <u>extenção</u> do R.
- $a \in R'$ é chamado <u>integral</u>, se a satisfaz um polinomio monico com coeficientes em R.
  Se todo $a \in R'$ é integral $\Rightarrow R'$ é cham. <u>integral</u>
- O conjunto dos elementos integrais é denotado por $\overline{R}$.

Hoje vamos ver o que acontece com ideais primos fazendo extenção. Tem 4 resultados importantes: Lying Over, Incomparabilidade, Going Up, Going Down.

<u>Proposição</u> [Lying Over].

Seja $R \subset R'$ uma extenção, $P \triangleleft R$ primo.

(a) Existe primo $P' \triangleleft R'$ com $P' \cap R = P$ $\Longleftrightarrow$ $PR' \cap R \subset P$

(b) Se $R \subset R'$ é integral isto sempre o caso

$$\begin{array}{ll} R': & P' \\ & \downarrow \\ R: & P \end{array}$$

Prova.

(a) "$\Rightarrow$" Se $P'\cap R = P \Rightarrow$

$$PR'\cap R = (P'\cap R)R'\cap R \subset P'R'\cap R = P'\cap R = P.$$

"$\Leftarrow$" Considere conjunto multiplicamente fechado $S = R\setminus P$. Como $PR'\cap S = (PR'\cap R)\setminus P = \emptyset$ pelo hipotese, assim [Ex. 2, Lista 6] existe um primo $P'\triangleleft R'$ com $PR'\subset P'$ e $P'\cap S = \emptyset$. Mas agora

$P\subset PR'\cap R\subset P'\cap R$, e

$P'\cap R\subset P'\cap P\subset P$

$\Rightarrow P'\cap R = P$ como queremos.

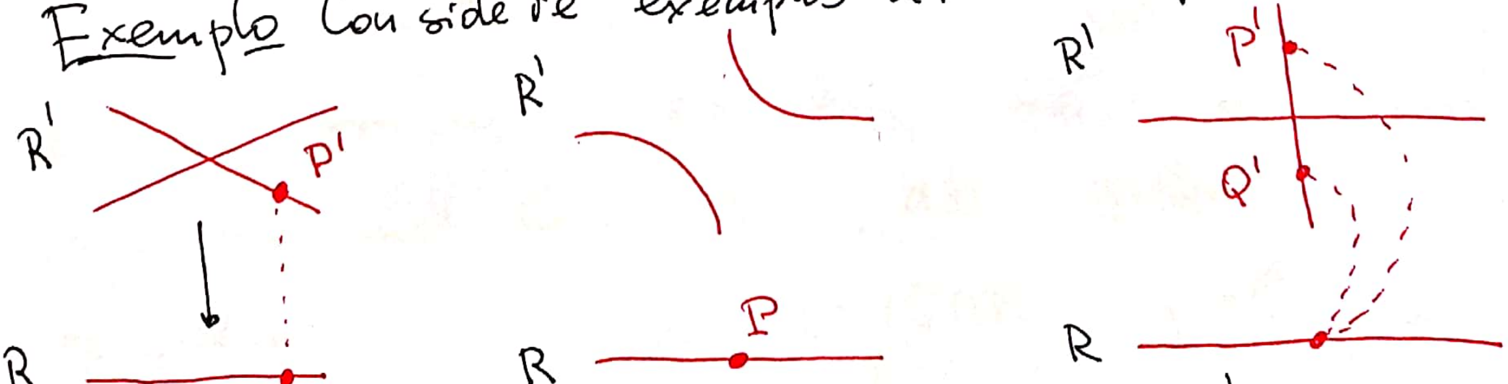
(b) Seja $a\in PR'\cap R$. Como $a\in PR'$ segue pelo T. do Cayley-Hamilton [como na Lema da aula pasada] que existe relasão monica:

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \dots + c_0 = 0, \quad c_0,\dots,c_{n-1}\in P.$$

Como $a\in R \Rightarrow a^n = -c_{n-1}a^{n-1} - \dots - c_0 \in P$

$\Rightarrow a\in P$ pois P é primo. □

Exemplo Considere exemplos da aula pasada.



$R' = \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{y^2-x^2}$ (a) $\quad R' = \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{(xy-1)}$ (b) $\quad R' = \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{(xy)}$ (c)

Scanned with CamScanner

Em: (a) extensão é integral.

(b) não tem P' "lying over" P.

ou seja (b) não é integral.

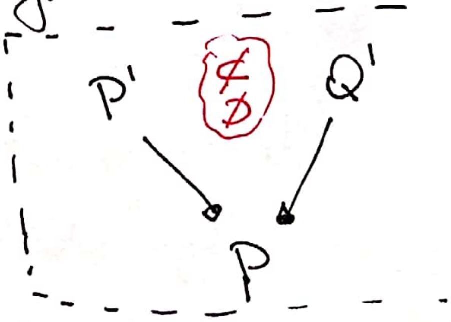
Tmb (a): mostre que P' não é único

Mas (c) é diferente, moste que pode ter dois P' e Q' "lying over" P com $Q' \subsetneq P'$. Vamos mostrar que isso não occore para extensões integrais.

Proposição [Incomparabilidade]

Seja $R \subset R'$ uma extensão integral

Se P', Q' primos distintos com $P' \cap R = Q' \cap R \Rightarrow P' \not\subset Q'$ e $Q' \not\subset P'$



Prova Seja $P' \cap R = Q' \cap R$ e $P' \subset Q'$.

Vamos mostrar que $Q' \subset P'$, assim $P' = Q'$.

Suponha que existe $a \in Q' \setminus P'$, assim [aula pasada] R'/P' é integral sobre $R/P' \cap R$, assim tem relação

$$\overline{a}^n + \overline{c_{n-1}} \cdot \overline{a}^{n-1} + \dots + \overline{c_0} = 0 \quad (*)$$

em R'/P' com $c_0, \dots, c_{n-1} \in R$. Vamos tomar $(*)$ com grau minimal. Como $a \in Q'$, assim $(*) \Rightarrow \overline{c_0} \in Q'/P'$

Mas como $c_0 \in R$, assim $\overline{c_0} \in (Q' \cap R)/(P' \cap R) = 0$

Assim $(*)$ não tem termo constante. Como $\overline{a}$ em dominio R'/P' podemos dividir $(*)$ por $\overline{a}$. Condradição pela minim. ∎

Corolário Seja $R \subset R'$ uma extensão integral.

(a) Se R e R' são domínios, assim

$$R \text{ é corpo } \iff R' \text{ é corpo.}$$

(b) $P' \triangleleft R'$ é maximal $\iff P' \cap R$ é maximal.

Prova (a) "$\Rightarrow$" Suponha que R um corpo e $P' \triangleleft R'$ ideal maximal. $0 \triangleleft R'$ é primo, pois R' é domínio. Ambos $0 \cap R$ e $P' \cap R$ são primos assim nulos, pois R é corpo. Assim $P' = 0$ pelo "Incomparabilidade". Assim R' é corpo.

"$\Leftarrow$" Se R não é corpo, assim existe ideal maximal não-nulo em R, P. Pelo "Lying Over" existe um primo $P' \triangleleft R'$ com $P' \cap R = P$, em particular $P' \neq 0$, assim R' tem ideal não-nulo $\Rightarrow R'$ não é corpo.

(b) $R/_{P' \cap R} \subset R'/_{P'}$ é extensão integral, assim o resultado segue pelo (a) $\boxtimes$.

Obs. Na prática vamos precisar versão relativa de "lying over": Dado $R \subset R'$ integral e $P \subset Q$ primos em R podemos encontrar P', Q' de modo que $P' \subset Q'$?

$$\begin{array}{lccc}
R': & P' & \subset & Q' \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
R: & P & \subset & Q
\end{array}$$

Proposição [Going Up]

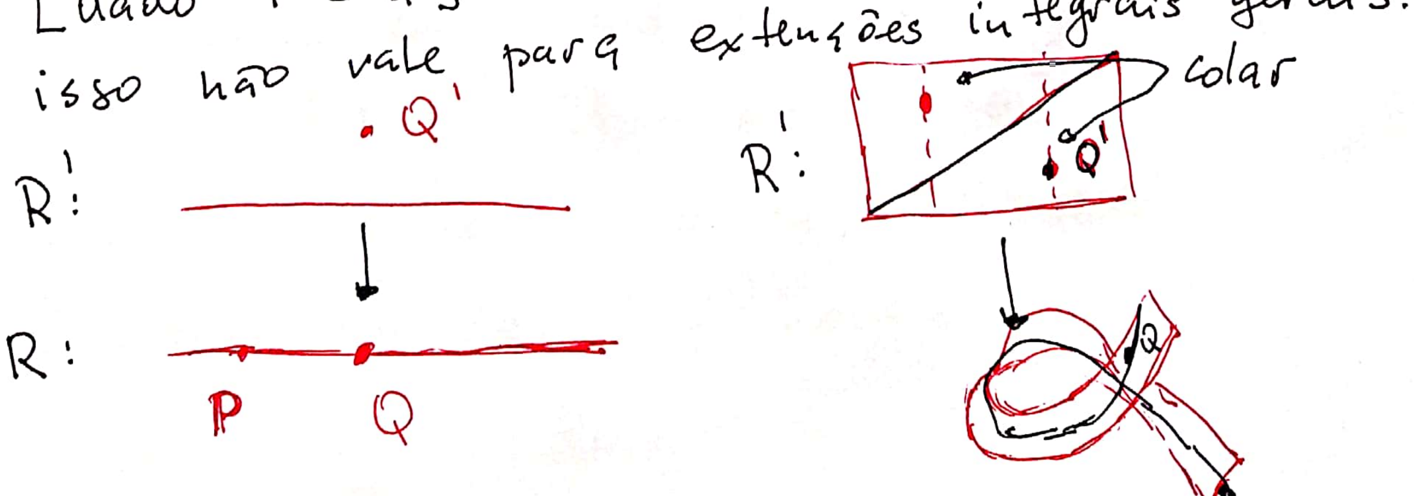
Seja $R \subset R'$ extensão integral, e
$P, Q \lhd R$ primos com $P \subset Q$
e $P' \lhd R'$ primo t.q. $P' \cap R = P$.

Assim existe primo Q' com
$Q' \cap R = Q$ e $P' \subset Q'$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[d] & \subset & Q' \arrow[d] \\ P & \subset & Q \end{tikzcd}$$

Prova R' é integral sobre R, assim
R'/P' é integral sobre $R/_{P' \cap R} = R/P$.
Agora Q/P é primo, assim [pelo Lying Over]
existe primo em R'/P' da forma Q'/P' com
$(Q'/P') \cap R/P = Q/P$, assim $Q' \cap R = Q$ e
resultado segue-se $\square$.

Exemplo Agora vamos considerar "Going Down"
propriedade, como na observação acima,
isto é encontrar ideal P' a partir Q'
[dado $P \subset Q$]. Em contrasto ao "Going Up"
isso não vale para extensões integrais gerais.



(a) (b)

Em (a) R' tem 2 componentes, um dos dois é ponto "sobre" Q. Assim neste caso "Going Down" é falso.

(b) $R' = \mathbb{C}[x,y]$. – plano complexo, e R obtido "colando" 2 linhas verticais. Neste caso "Going down" é falso de novo

Mais precisamente considere:

$$R = \frac{\mathbb{R}[x,y,z]}{(y^2 - x^2 - x^3)} \simeq \mathbb{R}[t^2-1, t^3-t, z]$$

e $S = \mathbb{R}[t, z]$ seu fecho integral em Quot R.

Vamos mostrar que "going down" não vale entre R e S.

Agora considerando

$$S: \quad \cancel{} \subseteq \underbrace{(t-1, z)}_{=Q'}$$
$$\downarrow$$
$$R: \quad \underbrace{(z-t-1)}_{=P} \subseteq \underbrace{(t^2-1, t^3-t, z)}_{=Q}$$

Não há primo em S que "lying over" $(z-t-1)$ e subideal em Q'. [Exercício p/ casa].

Mas, como vamos ver agora, tais problemas não acontecem se R é normal.

Proposição [Going Down].

Seja $R \subset R'$ uma extensão integral. Suponha que R é normal e R' um domínio. Seja $P \subset Q$ os primos em R e $Q' \triangleleft R'$ primo com $Q' \cap R = Q$. Assim existe primo $P' \triangleleft R'$ com $P' \subset Q'$ e $P' \cap R = P$.

$$\begin{tikzcd} R': & P' \arrow[d] & \subset & Q' \arrow[d] \\ R: & P & \subset & Q \end{tikzcd}$$

Prova Mapa natural $R' \longrightarrow R'_{Q'}$ (localização em Q') é injetivo, pois R' é um domínio. Assim temos $R \subset R' \subset R'_{Q'}$ uma extensão:

Nos vamos construir $P'_{Q'} \triangleleft R'_{Q'}$, primo "lying over" P. Assim ele deve ser da forma "localização" de $P' \triangleleft R'$, e vamos ter $P' \cap R = P$.

$$\begin{tikzcd} R'_{Q'}: & P'_{Q'} \arrow[d] & & \\ R': & P' \arrow[d] & \subset & Q' \arrow[d] \\ R: & P & \subset & Q \end{tikzcd}$$

Pela prop. 1 é suficiente mostrar que $PR'_{Q'} \cap R \subset P$. Assim seja $a \in PR'_{Q'} \cap R$, em particular $a = \frac{p}{s}$ com $p \in PR'$ e $s \in R' \setminus Q'$. Suponha que $a \neq 0$. Como R é normal, assim pelo Lema da aula pasada temos polinomio minimal de p sobre $K = \mathrm{Quot}\, R$ é da forma

$$f = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0, \quad c_0, \dots, c_{n-1} \in P.$$

f é irredutível sobre K. Mas $a \in R \subset K$
e portanto o polinomio

$$\frac{1}{a^n} f(ax) = x^n + \frac{c_{n-1}}{a} x^{n-1} + \dots + \frac{c_0}{a^n} = x^n + c'_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0'$$

é irredutível sobre K tmb e satisfaz

$$\frac{1}{a^n} f(as) = \frac{1}{a^n} f(p) = 0$$

assim é polinomio minimal de s, e seus coeficientes
$c_0', \dots, c_{n-1}'$ está em R.

Suponha que $a \notin P$. Assim as equações

$$c'_{n-i} a^i = c_{n-i} \in P \text{ de elementos de } R$$

implicam $c'_{n-i} \in P$ (pois P primo). Como $s \in R'$, temos

$$s^n = -c'_{n-1} s^{n-1} - \dots - c_0' \in PR' \subset QR' \subset Q'R' = Q'$$

$\Rightarrow s \in Q'$, pois Q' primo. Mas isso contradiz
$s \in R' \setminus Q'$ e portanto $a \in P$ como queremos

$\blacksquare$