Aula 19

Extensões integrais

Extensões algebricos e finitos dos corpos têm papel importante na teoria dos corpos. Extensões finitas e integrais de aneis generalizam estes conceitos.

Def. [Extensões finitas e integrais].

(a) Se $R \subset R'$ são aneis, dizemos que R' é <u>extensão</u> de R

<u>Obs.</u> As vezes na literatura pelo <u>extensão de aneis</u> se quer dizer qualquer homomorfismo $f: R \to R'$, de modo que R' é R-algebra.

(b) Se R é um anel. Um elemento a da extensão R' de R é chamado <u>integral</u> sobre R se existir um polinomio monico $f \in R[x]$ com $f(a) = 0$, i.e. existem $c_0, \dots, c_{n-1} \in R$ com

$$a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_0 = 0.$$

Dizemos que R' é <u>integral</u> se todo $a \in R'$ é integral.

(c) Uma extensão $R \subset R'$ é chamada <u>finito</u> se R' é finitamente gerada como R-modulo.

Obs. Se R e R' são corpos, assim as noções das extensões integrais e finitas coincidem com extensões algebricas e finitas dos corpos.

Exemplo Seja R um dominio de fatoração unica e $R' = \mathrm{Quot}\, R$ seu corpo de frações. Suponha que $a \in R'$, vamos mostrar que

$$a \text{ é integral sobre } R \iff a \in R.$$

[$\Leftarrow$] é obvio. [$\Rightarrow$] Suponha que $a = \frac{p}{q}$ integral sobre R, com p, q coprimos, i.e. existe equação

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + c_0 = 0$$

com $c_0, \ldots, c_{n-1} \in R$, temos

$$p^n + c_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + c_0 q^n = 0, \text{ isto é}$$

$$p^n = -q\,(c_{n-1} p^{n-1} + \ldots + c_0 q^{n-1}) \text{ em } R.$$

Assim $q \mid p^n$, que possivel somente se q é unidade

Assim $a = \frac{p}{q} \in R$. //

Exemplo 2 [Exemplos geometricos das extensões integr.]

Seja $R = \mathbb{C}[x]$

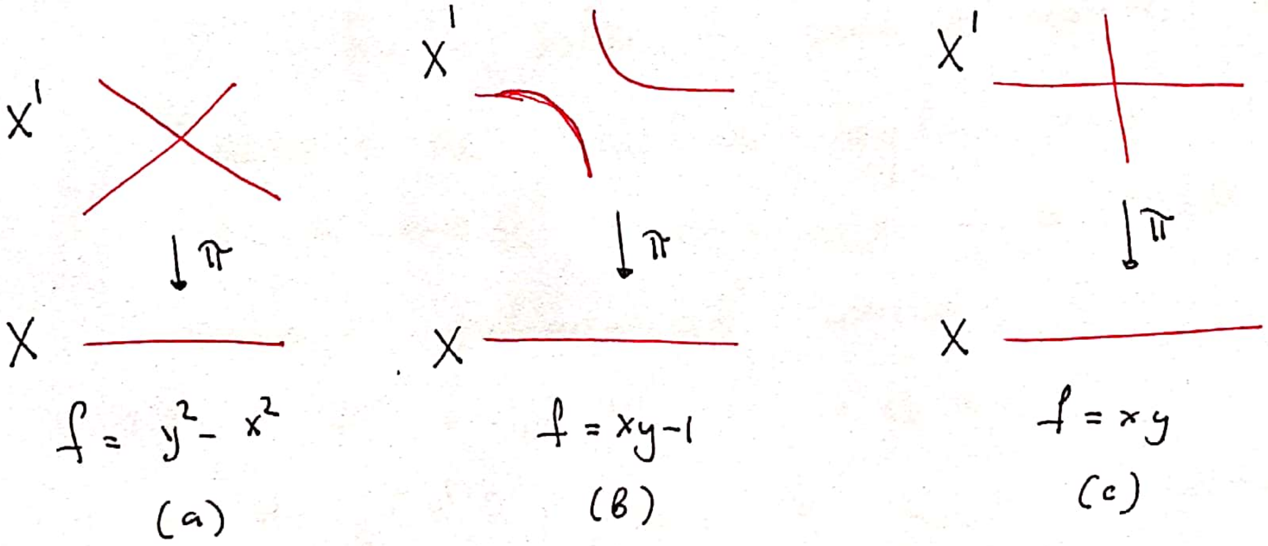
$R' = R[y]/(f) = \mathbb{C}[x,y]/(f)$, com $f \in R[y]$

Geometricamente, temos $R = A(X)$, $R' = A(X')$ ③

com $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ e curva X' em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ dada pelo equação $f(x,y) = 0$. Agora:

extenção $R \longrightarrow R'$ corresponde ao morfismo: $\pi : X' \longrightarrow X$

Vamos ilustrar isso nos três exemplos, considerando somente os pontos reais [em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$].



<u>Observe</u> que f é monico em (a) e não é monico em (b), (c)

De fato vamos provar que extenções em (b), (c) NÃO são integrais e em (a) é integral.

<u>Proposição</u> [Extenções integrais e finitas].

Uma extenção R' é finita sobre R $\Longleftrightarrow$ $R' = R[a_1, \ldots, a_n]$, com $a_1, \ldots, a_n \in R'$ são integrais sobre R.

Neste caso, alem disso $R \subset R'$ é extenção integral.

Prova.

[$\Rightarrow$] Seja $R' = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ f.g. como R-modulo.
Assim $R' = R[a_1, \ldots, a_n]$, i.e. R' gerado pelos mesmos elementos como R-algebra.
Vamos mostrar que todo elemento de R' é integral sobre R [que vai provar alem disso parte]. Seja $a \in R'$, como R' é finito sobre R, podemos aplicar o Teorema de Hamilton-Cayley para homomorfismo $\varphi: R' \to R'$, $x \mapsto ax$ para receber equação polinomial monico:

$$\varphi^k + c_{k-1}\varphi^{k-1} + \ldots + c_0 = 0$$

em $Hom_R(R', R')$, com $c_0, \ldots, c_{k-1} \in R$ e portanto

$$a^k + c_{k-1}a^{k-1} + \ldots + c_0 = 0 \text{ [aplicando } \varphi(1) = a].$$

Assim a é integral sobre R.

[$\Leftarrow$] Seja $R' = R[a_1, \ldots, a_n]$, com $a_1, \ldots, a_n$ integrais sobre R. Todo elemento de R' tem forma

$$(*) \quad \sum_{k_1, \ldots, k_n} c_{k_1, \ldots, k_n} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n},$$ com

$c_{k_1, \ldots, k_n} \in R$. Todo a_i satisfaz um polinomio monico de algum grau r_i. Assim usando isso podemos reduzir exponentes em $(*)$ p/

caso $k_i < r_i$, $i = 1, \dots, n$.

Assim R' é finit. gerado sobre R pelos todos expressões monicos $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$ com $k_i < r_i$. $\square$

Lema [Transitividade de extensões finitas e integrais]

Sejam $R \subset R' \subset R''$ os aneis.

(a) Se $R \subset R'$, $R' \subset R''$ são finitos $\Rightarrow$ $R \subset R''$ é tmb.

(b) Se $R \subset R'$, $R' \subset R''$ são integrais $\Rightarrow$ $R \subset R''$ é tmb.

Prova (a) Suponha que $a_1, \dots, a_n$ geram R' [como R-mod]
$b_1, \dots, b_m$ geram R'' [como R'-mod]

Assim todo elemento de R'' tem forma $\sum_{i=1}^{m} c_i b_i$, com $c_i \in R'$, i.e $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} a_j) b_i$

Assim os produtos $a_j b_i$ geram R'' como R-mod.

(b) Ex. p/ casa.

Lema Seja R' uma extensão integral de R.

(a) Se $I \triangleleft R'$ um ideal $\Rightarrow$ R'/I é extensão integral de $R/I \cap R$

(b) Se S é mult. fechado em R $\Rightarrow$ $S^{-1}R'$ é extensão integral de $S^{-1}R$

(c) $R'[x]$ é extensão integral de $R[x]$.

Prova:

(a) Mapa $R/_{I\cap R} \longrightarrow R'/_{I}$, $\bar{a} \longmapsto \bar{a}$

é bem-definida e injetiva, assim $R'/_{I}$ é extensão de $R/_{I\cap R}$. Alem disso, para $a \in R'$ existe relação monica $a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_0 = 0$ com $c_0, \ldots, c_{n-1} \in R$, e portanto pasando pelo quociente

$\bar{a}^n + \overline{c_{n-1}}\,\bar{a}^{n-1} + \ldots + \overline{c_0} = 0.$ $\Rightarrow$ $\bar{a}$ é integral sobre $R/_{I\cap R}$

(b) Homomorfismo $S^{-1}R \to S^{-1}R'$, $\frac{a}{s} \longmapsto \frac{a}{s}$ é bem definido e injetivo. Alem disso, $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$ temos relação monica $a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_0 = 0$, com $c_0, \ldots, c_{n-1} \in R$, assim

$$\left(\frac{a}{s}\right)^n + \frac{c_{n-1}}{s}\left(\frac{a}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{c_0}{s} = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{a}{s}$ é integral sobre $S^{-1}R$.

(c) Ex. p/ casa.

Definição [Fecho integral].

(a) Seja $R \subset R'$ uma extenção. O conjunto de todos elementos integrais é um anel $\overline{R}$ com

$$R \subset \overline{R} \subset R'$$

chamado fecho integral de R. Dizemos que R é integramente fechado se $\overline{R} = R'$.

(b) Um dominio R é chamado integramente fechado ou normal se ele é fechado integramente em $\mathrm{Quot}\, R$.

Obs. Observe que $\bar{R}$ é um anel de fato.
Pois se a, b são integrais sobre R
$\Rightarrow R[a,b]$ é fmb
$\Rightarrow a+b,\ a \cdot b$ são integrais.

Exemplo Se R é Dominio de fatoração unica
$\Rightarrow R$ é normal, pois unicos elementos de Quot R integrais sobre R são em R.
[Exemplo na pagina 2].

Exemplo [Interpretação geometrica de dominios normais]
Seja $R = A(X)$ anel das coordenadas da variedade X. Elementos $\varphi = \frac{f}{s} \in \text{Quot } R$ podem ser vistos como funções racionais em X.
Assim "R é normal" signifique que toda função racional φ satisfaz relação monica
$$\varphi^n + c_{n-1}\varphi^{n-1} + \ldots + c_0 = 0$$ é um elemento em R.

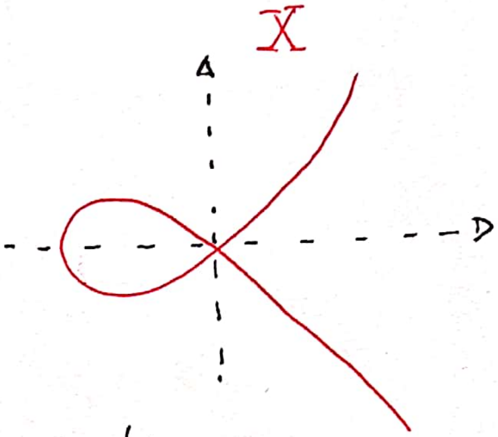
(a) Se $R = \mathbb{C}[x]$, assim R corresponde variedade $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.
R é normal pois é dominio de fat. unica.
De fato isso pode ser visto geometricamente.
O unico jeito para função racional φ de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ ser mal-definido num ponto $a \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, é se φ tem o pólo neste ponto, i.e. φ tem formato
$$x \longmapsto \frac{f}{(x-a)^k}$$ com $k \geq 1$, $f \in \text{Quot } R$ bem-definido em a.

Mas neste caso φ não pode satisfazer equação monica [verifique!!].
Assim R é normal.

(b) Seja $\bar{X} = V(y^2 - x^2 - x^3)$, e

$$R = A(X) = \frac{\mathbb{R}[x,y]}{y^2 - x^2 - x^3}$$

Curva eliptica.



Neste caso R não é normal. Por exemplo $\varphi = \frac{y}{x} \in \mathrm{Quot}\, R \setminus R$ satisfaz $\varphi^2 - x - 1 = \frac{y^2}{x^2} - x - 1 = 0$, mas φ é mal-definido em $(0,0)$. [pois aproxima -1 ou 1 dependendo do "ramo"].

Assim a razão para R não é normal é que X tem "singularidade" em $(0,0)$.
De fato "normalidade" é cerca "não-singularidade".

<u>Lema</u> Seja $R \subset R'$ uma extenção integral de dominios, e suponha que R é normal.

(a) para todo $a \in R'$, seu polinomio minimal f sobre $\mathrm{Quot}\, R$ tem coeficientes em R.

(b) Se alem disso $a \in PR'$ para um ideal primo $P \trianglelefteq R$, assim os coeficientes não principais estão em P.

<u>Prova</u> (a) Se a é integral sobre R, assim existe um polinomio monico $g \in R[x]$ com $g(a) = 0$.

Assim $f | g$ sobre Quot R, isto é

$g = fh$ para algum $h \in (\text{Quot } R)[x]$

Aplicando Exercicio da Lista 6, temos

que $f \in R[x]$ $(\bar{R} = R)$.

(b) Se $a = p_1 a_1 + \dots + p_k a_k$, com $p_1, \dots, p_k \in P$ e $a_1, \dots, a_k \in R'$.

Trocando R' pelo $R[a_1, \dots, a_k]$, podemos supor que R' é finito sobre R. Agora aplicando o Teorema de Hamilton-Cayley ao $\varphi : R' \to R'$, $x \mapsto ax$, recebemos a relação polinomial

$$\varphi^n + c_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + c_0 = 0 \quad \text{em } \operatorname{Hom}_R(R', R')$$

com $c_0, \dots, c_{n-1} \in P \Rightarrow$ tem polinomio monico $g \in R[x]$

com $g(a) = 1$ [colocando $\varphi(1) = a$].

Como no item a) escrevemos $g = fh$, $f, h \in R[x]$ e f é minimal de a. Ou, reduzindo modulo P, temos $\bar{x}^n = \bar{f} \cdot \bar{h}$ em $(R/P)[x]$. R/P é dominio $\Rightarrow$ $\bar{f}, \bar{h}$ são potencias de x. Assim os coeficientes não-principais são em P $\square$