Aula 18

Artiniano vs Noetheriano

__Proposição__ Seja R um anel t.q. o ideal 0 é produto $M_1 \cdots M_n$ de ideais maximais (não necessariamente distintos), então:

$$R \text{ é Noetheriano } \Leftrightarrow R \text{ é Artiniano.}$$

__Prova__ Considere a cadeia de R-modulos:

$$R \supsetneq M_1 \supseteq M_1 M_2 \supseteq \dots \supseteq M_1 \cdots M_n = 0.$$

Seja $X_i = M_1 \cdots M_i$, $i=1,\dots,n$. Cada modulo quociente X_{i-1}/X_i é um R/M_i-modulo, assim é um espaço vetorial sobre o corpo R/M_i. Assim

$$X_{i-1}/X_i \text{ - é Artiniano} \Leftrightarrow \text{é Noetheriano} \quad (*)$$

Por outro lado os submodulos (R/M_i) são R-submodulos assim $(*)$ vale como R-modulos. Agora considere as sequências exatas curtas:

$$0 \to X_1 \hookrightarrow R \to R/X_1 \to 0$$

$$0 \to X_2 \hookrightarrow X_1 \to X_1/X_2 \to 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$0 \to X_i \to X_{i-1} \to X_{i-1}/X_i \to 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$0 \to X_{n-1} \to X_{n-2} \to X_{n-2}/X_{n-1} \to 0$$

$$0 \to X_n \to X_{n-1} \to X_{n-1}/X_n \to 0$$

Suponha que R é Noetheriano $\Rightarrow X_1$ e R/X_1 são.

$\Rightarrow X_2$ e X_1/X_2 são Noetherianos

$\vdots$

$\Rightarrow X_i$ e X_{i-1}/X_i são Noetherianos

$\vdots$

Logo os quocientes X_{i-1}/X_i são Artinianos.
Em particular X_{n-1}/X_n é Artiniano, mas $X_n = 0$
Logo X_{n-1} é Artiniano e X_{n-2}/X_{n-1} é Artiniano
implique que X_{n-2} é Artiniano, continuando
nessa maneira recebemos que R é Artiniano.
Mesma coisa acontece trocando "Artiniano" por "Noeth." $\square$

<u>Teorema</u> [Hopkins] Seja R um anel, assim

R é Noetheriano e $\dim R = 0$ $\iff$ R é Artiniano.

Prova [$\Leftarrow$] Como R é Artiniano,

assim: • dim $R = 0$
• $J(R)$ é nilpotente
• R tem numero finito dos ideais maximais

$\Big\}$ Aula 16.

$\Rightarrow J^k(R) = 0$, assim

$$\prod_{i=1}^{n} M_i^k \leq \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k = 0,$$

ou seja ideal 0 é produto de numero finito dos ideais maximais $\Rightarrow$ R é Noetheriano pela proposição anterior.

[$\Rightarrow$] Como dim R $\Rightarrow$ todo ideal primo é maximal e minimal.

Como R é Noetheriano, assim ideal nulo tem decomposição primaria, logo os ideais primos isolados associados a (0) são os ideais primos minimais de R, assim R tem numero finito de ideais primos minimais.

Assim $N(R) = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, com M_i ideais primos minimais. Mas $N(R)$ é nilpotente num anel Noetheriano [Ex. p/ casa]. logo

$$\prod_{i=1}^{n} M_i^k \leq \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k = N^k(R) = 0 \Rightarrow \text{R é Artiniano} \quad \square$$

<u>Corolário</u> Num anel Artiniano R todo ideal admite decomposição primária.

<u>Proposição</u> Seja R um anel Noetheriano local e M seu ideal maximal. Então exatamente uma das seguintes condições é verdadeira:

a) $M^n \neq M^{n+1}$ para todo n.

b) $M^n = 0$ p/ algum n, neste caso R é Artiniano.

<u>Prova</u> Suponha que $M^n = M^{n+1}$ p/ algum n.

Como R é Noetheriano $\Rightarrow$ M^n é f.g.,
é local $\Rightarrow$ $J(R) = M$.

Assim, pelo lema de Nakayama, temos

$$M^n = M^{n+1} = J(R)\cdot M^n \Rightarrow M^n = 0.$$

Seja P um ideal primo de R, assim

$$0 = M^n \subseteq P \Rightarrow \sqrt{M^n} = M \subseteq P = \sqrt{P}$$

e como M é maximal $\Rightarrow$ $M = P$. Logo M é único primo. ou seja $\dim R = 0$ $\Rightarrow$ R é Artiniano pela proposição anterior.

<u>Obs.</u> Se R um anel Artiniano local $\Rightarrow$ M é único ideal primo em R $\Rightarrow$ $N(R) = M$.
Assim todo elemento de M é nilpotente.

Teorema [de Estrutura de Aneis Artinianos].

Todo anel Artiniano é um produto direto finito de aneis Artinianos locais determinados de maneira unica (a menos iso.)

Prova Seja R anel Artiniano, e sejam M_i os ideais primos distintos de R.

Temos que $\prod_{i=1}^{n} M_i^k = 0$ para algum $k>0$.

Observe que: a) $\sqrt{I} = R \iff I = R$

b) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$ (Ex. p/ casa).

Seja $I = M_i + M_j$, com $i \neq j$. Logo $I = R$. Por outro lado

$$\sqrt{M_i^k + M_j^k} \overset{b)}{=} \sqrt{\sqrt{M_i^k}+\sqrt{M_j^k}} = \sqrt{M_i + M_j} = \sqrt{R} = R.$$

$\overset{a)}{\Longrightarrow} \quad M_i^k + M_j^k = R \quad \Longrightarrow \quad M_i^k, M_j^k$ são coprimos.

Assim, pelo Teorema Chines dos Restos, temos:

$\bigcap_{i=1}^{n} M_i^k = \prod_{i=1}^{n} M_i^k = 0$ é uma decomposição primaria minimal de 0 [minimal é Ex p/ casa].

e $$R = \frac{R}{\underbrace{M_1^k \cdots M_n^k}_{\overset{\shortparallel}{0}}} \simeq \frac{R}{M_1^k} \times \cdots \times \frac{R}{M_n^k}$$

Cada quociente $\frac{R}{M_i^k}$ é Artiniano, como quociente de anel Artiniano. Provaremos que $\frac{R}{M_i^k}$ é local.

Seja $\overline{M}$ um ideal maximal em $\frac{R}{M_i^k}$, assim

$\bar{M}$ corresponde a um ideal maximal de R contendo M_i^k. Suponha que $M_i^k \subseteq M_j$, assim

$$\sqrt{M_i^k} = M_i \subseteq M_j = \sqrt{M_j} \Rightarrow i = j.$$

Assim existe somente um ideal maximal que contem $M_i^k \Rightarrow \frac{R}{M_i^k}$ é local $\Rightarrow R$ é prod. finito dos aneis locais.

Para $\boxed{\text{unicidade}}$ suponha que $R \simeq \prod_{i=1}^{m} R_i$, com R_i são Artinianos. Seja $\pi_i : R \to R_i$ projeção, e $I_i = \ker \pi_i$, assim $R_i \simeq R/I_i$

Temos que $\bigcap_{i=1}^{m} I_i = 0$, vamos ver que isso é uma decomposição primaria do (0).

Seja Q_i unico ideal primo de R_i e $P_i = \pi_i^{-1}(Q_i)$
$\Rightarrow P_i$ é primo e logo é maximal (pois R é Artiniano)

Como $Q_i = N(R_i) \Rightarrow I_i$ é P_i-primario:

$$a \in \sqrt{I_i} \Leftrightarrow a^t \in I_i \Leftrightarrow \pi_i(a^t) = \pi_i(a)^t = 0$$
$$\Leftrightarrow \pi_i(a) \in Q_i$$
$$\Leftrightarrow a \in \pi_i^{-1}(Q_i) = P_i.$$

Logo $\sqrt{I_i} = P_i$ (que é maximal)

$\Rightarrow$ I_i é P_i - primario, ou seja

$\bigcap_{i=1}^{m} I_i = 0$ é uma decomposisão primaria.

Vejamos que decomposisão é primaria é minimal.

Facil ver que P_i são dois a dois coprimos, assim são distintos. Por outro lado se

$\bigcap_{j \neq i} I_j \subseteq I_j$, assim $\bigcap_{j \neq i} P_j \subseteq P_i$ ou seja

$P_j \subseteq P_i$ para algum j.

$\Rightarrow$ $P_j = P_i$ (pois P_j é maximal) absurdo.

Logo $\bigcap_{i=1}^{m} I_i = 0$ é minimal.

Assim $Ass(0) = \{P_1, \dots, P_m\} = \{M_1, \dots, M_n\}$ e pelo 1ª Teorema da Unicidade $\Rightarrow$ $m = n$.

Alem disso todos primos são isolados, assim determinadas na maneira unica por R pelo 2ª Teorema da Unicidade, logo $I_i \simeq M_{\sigma(i)}^{k}$ para alguma permutasão σ.

Assim aneis locais $R_i \simeq R/I_i \simeq R/M_{\sigma(i)}^{k}$ são det. na maneira unica par R $\square$

Obs: Se R é local, $M \triangleleft R$ maximal, $k = R/M$ seu corpo de resíduos e X um R-módulo.

Assim X/MX tem estrutura do k-espaço vetorial.

Se X é gerado por $\{x_i\}_{i=1}^n \Rightarrow X/MX$ é f.g. como R-módulo, e é f.g. como k-espaço vetorial com $\dim_k X/MX \leq n$.

Além disso, pelo L. de Nakayama, se X é f.g. e $\{x_i\}_{i=1}^n$ elementos em X cujas imagens geram $X/MX \Rightarrow x_i$ geram X.

Proposição Seja R um anel Artiniano local. As seguintes condições são equivalentes:

a) Todo ideal em R é principal,

b) o ideal maximal M é principal,

c) $\dim_k M/M^2 \leq 1$.

Prova a) $\Rightarrow$ b) é óbvio

b) $\Rightarrow$ c) segue pela obs acima

c) $\Rightarrow$ a) Se $\dim_k (M/M^2) = 0 \Rightarrow M = M^2$ e M é f.g. (pois R é Artiniano, logo é Noetheriano)

Como R é local, assim $J(R) = M$, portanto $J(R) = M = 0$ pelo lema de Nakayama e R é corpo.

Se $\dim_k(M/M^2) = 1$, assim M é principal pelo Obs acima, logo, $M = (x)$.

Seja $I \neq (0)$ um ideal em R, assim

$$M = J(R) = N(R)$$

$\Rightarrow$ M é nilpotente, assim existe $r > 0$ t.q.

$$I \subseteq M^r \quad e \quad I \nsubseteq M^{r+1}.$$

Logo existe $b \in I$ e $b \notin (x^{r+1}) = M^{r+1}$, com $b = y x^r$, assim $y \notin (x) = M$, i.e. y não é nilpotente, assim y é unidade em R. Logo $x^r \in I$, assim

$$M^r = (x^r) \subseteq I \quad e \text{ temos } I = M^r = (x^r).$$

Assim I é principal. $\square$