Aula 17

Decomposição primaria II

Lembrete [aula pasada].

- Seja $I \triangleleft R$ um ideal. Uma decomposição primaria de I é coleção finita $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ dos ideais primarios Q_i (ou seja $ab \in Q_i \Rightarrow a \in Q_i$ ou $b^n \in Q_i$) tal que
$$I = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$$
- Se R é Noetheriano $\Rightarrow$ todo $I \triangleleft R$ admite decomp. primaria.
- Mas decomposição primaria não é unica geralmente (veja exemplos da aula pasada).

Lema 1 [Interseção dos ideais primarios].
Seja $P \triangleleft R$ um ideal primo. Se $Q_1, Q_2 \triangleleft R$ dois ideais P-primarios (ou seja $\sqrt{Q_1} = P = \sqrt{Q_2}$)
Assim $Q_1 \cap Q_2$ é P-primario tmb.

Prova Primeiramente,

$$\sqrt{Q_1 \cap Q_2} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} = P \cap P = P$$

Lista 2, Ex. 1.

Se $ab \in Q_1 \cap Q_2 \Rightarrow ab \in Q_1$ e $ab \in Q_2$

$\Rightarrow (a \in Q_1$ ou $b \in P)$ e $(a \in Q_2$ ou $b \in P)$

$\Rightarrow a \in Q_1 \cap Q_2$ e $b \in P$

$\Rightarrow Q_1 \cap Q_2$ é P-primario $\square$

Def. [Decomposição primaria minimal].

Seja $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ decomposição primaria de $I \trianglelefteq R$ e seja $P_i = \sqrt{Q_i}$, $i = 1, \dots, n$. Assim decomposição é chamada minimal se:

(a) $\bigcap_{j \neq i} Q_j \not\subset Q_i$ para todos i.

(b) $P_i \neq P_j$ para todos $i \neq j$.

Corolario Se um ideal tem decomposição primaria, assim tem o minimal tmb.

Prova Dada decomposição primaria excluimos todos ideais que não satisfazem (a) e trocamos ideais com o mesmo radical pelo intersecão deles.

Exemplo [Decomposição primária minimal não é única].

Considere $I = (y)\cdot(x,y) = (xy, y^2)$ em $\mathbb{R}[x,y]$.

Assim $V(I) = V(y)$ – eixo x em $\mathbb{R}^2$.

I não é primario, pois $yx \in I$, mas $y \notin I$, $x^n \notin I$.

$$I = Q_1 \cap Q_2 = (y) \cap (x^2, xy, y^2), \quad I = Q_1 \cap Q_2' = (y) \cap (x, y^2).$$

e ambas decomposisões são minimais [Ex. p/ casa].

Observe que $\sqrt{Q_1} = Q_1 = (y)$

$$\sqrt{Q_2} = (x,y) = \sqrt{Q_2'}$$

Ou seja ideais primos na decomposição são unicamente determinados neste caso.

Vamos mostrar que isso sempre acontece.

Lema Seja $Q \lhd R$ um ideal P-primario. Assim para todo $a \in R$ temos:

$$\sqrt{Q:a} = \begin{cases} R, & \text{se } a \in Q, \\ P, & \text{se } a \in Q. \end{cases}$$

Prova Se $a \in Q \Rightarrow$ obviamente $Q:a = R \Rightarrow \sqrt{Q:a} = R$.

Se $a \notin Q$, assim para todo $b \in Q:a$, temos $ab \in Q$ $\Rightarrow b \in P$ [pois Q é P-primario]. Assim $Q \subset Q:a \subset P$

Agora [pegando radicais] $P \subset \sqrt{Q:a} \subset P$ $\square$.

Definição [Ideais primos asociados, isolados, embutidos].

(a) Um <u>ideal primo asociado</u> de I é um ideal primo que pode ser escrito como $\sqrt{I:a}$ para algum $a \in R$. Pelo $\mathrm{Ass}(I)$ denotamos o conjunto dos primos asociados.

(b) Elementos minimais de $\mathrm{Ass}(I)$ chamam-se <u>primos isolados</u> ou outros pontos são chamados <u>primos embutidos</u>.

Proposição [1ª Teorema da Unicidade].
Seja $Q_1, \dots, Q_n$ decomposição minimal primaria de um ideal $I \trianglelefteq R$, e $P_i = \sqrt{Q_i}$, $i = 1, \dots, n$.
Assim $\{P_1, \dots, P_n\} = \mathrm{Ass}(I)$, em particular o numero dos componentes e seus radicais não dependem da decomposição escolhida.

Prova: $\boxed{\text{"}\subset\text{"}}$ Vamos ver que $P_i \in \mathrm{Ass}(I)$ p/ todo i.
Como decomposição é minimal, existe $a \in \bigcap_{j \neq i} Q_j$ com $a \notin Q_i$, assim:

$$\begin{aligned}\sqrt{I:a} &= \sqrt{Q_1:a \cap \dots \cap Q_n:a} & & \text{[Lista 2, Ex. 1]}\\ &= \sqrt{Q_1:a} \cap \dots \cap \sqrt{Q_n:a} & & \text{[Lema acima].}\\ &= P_i\end{aligned}$$

"$\supset$" Seja $P \in Ass(I) \Rightarrow P = \sqrt{I:a}$, com $a \in R$

Assim, $P = \sqrt{I:a} = \sqrt{Q_1:a} \cap \ldots \cap \sqrt{Q_n:a}$

Portanto $P \supset \sqrt{Q_i:a}$ para algum i [Lista 1, Ex. 7].

Mas tmb $P \subset \sqrt{Q_i:a} \Rightarrow P = \sqrt{Q_i:a}$

Agora pelo lema acima $\sqrt{Q_i:a} = R$ ou P_i, como P primo

assim $P = P_i$ $\square$

Exemplo No exemplo acima P_1 é isolado

P_2 é embutido.

Corolario [Primos isolados = Primos minimais]

Seja $I \triangleleft R$ num anel Noetheriano. Assim, primos isolados de I são exatamente ideais primos minimais, isto é primos $P \supset I$ t.q. não existe ideal primo com $I \subset Q \subsetneq P$.

Em particular, num anel Noetheriano existem apenas numero finito de ideais primos sobre um ideal dado.

Prova. Como R é Noetheriano, existe decomp. minimal $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$. Denote $P_i = \sqrt{Q_i}$

assim $Ass(I) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, pelo Prop. acima.

Observe que, se $P \supset I \Rightarrow P \supset Q_1 \cap \ldots \cap Q_n \Rightarrow P \supset Q_i$

assim $P \supset \sqrt{Q_i} = P_i$.

- Agora se $P_i \in Ass(I)$ (isolado) e P um primo com $I \subset P \subset P_i$, assim $P_j \subset P \subset P_i$. Mas P_i é isolado, portanto $P_j = P = P_i$. $\Rightarrow$ P_i é minimal sobre I.

- Seja P um primo minimal sobre I.
Assim $I \subset Q_i \subset P_i \subset P$ para algum i. Como P é minimal sobre I, assim $P = P_i$ é asociado, e portanto primo isolado $\square$

<u>Obs.</u> Em particular o Corolario acima implique que os primos isolados de um ideal I em anel das coordenadas $A(X)$ corespondem exatamente ao subvariedades maximais, isto é componentes irredutiveis de $V(I)$ como no exemplo acima.

<u>Proposição</u> Seja S um conjunto multiplicativo de R e Q um ideal P-primario.

a) Se $S \cap P \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $S^{-1}Q = S^{-1}R$

b) Se $S \cap P = \emptyset$ $\Rightarrow$ $S^{-1}Q$ é $S^{-1}P$-primario.

<u>Prova</u>. Se $s \in S \cap P$, assim $s^n \in S \cap Q$.

Logo $S^{-1}Q$ contém elemento $\frac{s^n}{1}$ que é uma unidade de $S^{-1}R$ (pelo prop. da mapa de local.)

$\Rightarrow$ a) segue-se.

b) $\sqrt{S^{-1}Q} = S^{-1}\sqrt{Q} = S^{-1}P$ [Lista 4, Ex. 8]

e como $S \cap P = \emptyset$ segue que $S^{-1}P$ é primo de $S^{-1}R$

Suponha $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in S^{-1}Q$, Logo existe $q \in Q$ e $s' \in S$

t.q. $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{q}{s'}$ ou seja existe $t' \in S$ tal que

$t'(abs' - stq) = 0$. Logo $t'abs' = t'stq$ em Q.

Então $ab \in Q$ ou $t's' \in P$ (pois Q é P-primario)

Mas $S \cap P = \emptyset \Rightarrow ab \in Q$. Assim $a \in Q$ ou $b \in P$

Portanto $\frac{a}{s} \in S^{-1}Q$ ou $\frac{b}{t} \in S^{-1}P = \sqrt{S^{-1}Q}$.

Logo $S^{-1}Q$ é $S^{-1}P$-primario $\square$.

<u>Proposição</u>* Sejam: $I \triangleleft R$ com dec. primaria minimal

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n, \quad \sqrt{Q_i} = P_i$$

Suponha que S intercepta $P_{m+1}, \ldots, P_n$ e S não intercepta $P_1, \ldots, P_m$ com S um conj. mult. fech. em R. $\Rightarrow S^{-1}I = S^{-1}Q_1 \cap \ldots \cap S^{-1}Q_m$ e dec. é minimal. <u>Prova</u> Ex. p/ casa.

Teorema [2^a Teorema da Unicidade].

Seja I um ideal em R com

$I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ dec. primaria minimal,

e $\Sigma = \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}\}$ o conjunto isolado em $Ass(I)$.

Então $Q_{i_1} \cap \ldots \cap Q_{i_m}$ independente da decomposição.

Prova Seja S q.q. conjunto mult. fechado em R.

Se $J \triangleleft R \Rightarrow \rho^{-1}(S^{-1}J) = \bigcup_{s \in S} (J:s)$, com $\rho : R \to S^{-1}R$.

Pois $a \in \rho^{-1}(S^{-1}J) \Leftrightarrow \rho(a) = \frac{a}{1} \in S^{-1}J$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{x}{s}, \ x \in J, s \in S$$

$$\Leftrightarrow (as - x)t = 0, \quad t \in S$$

$$\Leftrightarrow ast \in J$$

$$\Leftrightarrow a \in \bigcup_{s \in S} (J:s).$$

Agora se Q um ideal P-primario, e $S \cap P = \emptyset$, então $\rho^{-1}(S^{-1}Q) = Q$, pois $\rho^{-1}(S^{-1}Q) = \bigcup_{s \in S} (Q:s)$, e se $s \in S$, pelo lema $(Q:s) = Q$ para todo $s \in S$.

Pela Prop* temos que $\rho^{-1}(S^{-1}J) = \rho^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}Q_i\right)$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \rho^{-1}(S^{-1}Q_i) = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$$

Finalmente, seja $S = R \setminus \bigcup_{P \in \Sigma} P$ então S intercepta os $P \in Ass(I) \setminus \Sigma$ e não intercepta os $P \in \Sigma$.

Logo $\rho^{-1}(S^{-1}I) = \bigcap_{j=1}^{m} Q_{i_j}$ e interseção dos Q_{i_j} depende somente de I, pois pelo 1ª TU, os P_i's dependem somente do ideal I e não da decomposição primaria especifica de I. $\square$

<u>Corolario</u> As componentes primarias isoladas (i.e. as componentes Q_i com $\sqrt{Q_i} = P_i$ primo isolado em $Ass(I)$) são univocamente determinadas por I.

<u>Prova</u> Aplique o Teorema acima com $\Sigma = \{P\}$ onde $P \in Ass(I)$ é primo isolado.

Neste caso componente primaria isolado satisfaz

$$Q = \rho^{-1}(S^{-1}I), \text{ com } S = R \setminus P.$$

<u>Obs.</u> Componentes primarias embutidas, não são, em geral, univocamente determinadas por ideal I (como no Exemplo acima).