Aula 16

Aneis Artinianos.

Lembrete: Um anel R é Artiniano, se ele é Artiniano como R-modulo, ou seja toda cadeia descendente de ideais de A é estacionaria.

Proposição Se R é Artiniano $\Rightarrow$ $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Specm} R$, ou seja todo ideal primo é maximal.

Prova Seja $p \in \operatorname{Spec} R$ um primo. Assim R/p é anel Artiniano que é um dominio. Suponha $x \in R/p$ não-nulo. Logo $(x^n) = (x^{n+1})$ para algum n, e $x^n = x^{n+1} \cdot y$, $y \in R/p$. Então $x^n(1 - xy) = 0$, assim $xy = 1$, ou seja x tem inverso em R/p. Assim R/p é corpo e p é maximal $\square$

Corolario Se R é Artiniano, assim

$$N(R) = J(R)$$

nilradical radical Jacobson.

<u>Proposição 2.</u> Se $R \neq 0$ é Artiniano, assim R tem somente numero finito de ideais maximais.

<u>Prova.</u> Considere o conjunto de todos os ideais do R que são intersesões finitas

$$m_1 \cap m_2 \cap \ldots \cap m_r$$ de ideais maximais.

Como R é Artiniano, assim este conjunto tem elemento minimal:

$$I = m_1 \cap m_2 \cap \ldots \cap m_n .$$

Logo para q.q. ideal maximal m temos que

$$m \cap I = I$$ (pelo minimalidade de I).

Assim $m \supseteq I = m_1 \cap m_2 \cap \ldots \cap m_n$

$\Rightarrow$ $m \supseteq m_i$ para algum i $\Rightarrow$ $m = m_i$,

[Lista 1, Ex. 7] pois m_i é maximal $\square$

<u>Proposição 3</u> Se R é Artiniano, assim $N(R) = J(R)$ é ideal nilpotente.

<u>Prova</u> Como R é Artiniano, assim

$$J^n(R) = J^{n+1}(R) = \ldots$$

para algum n. Existe ideal minimal I com propriedade $I \cdot J^n(R) \neq 0$. Assim

$$\left(I \cdot J^n(R)\right) \cdot J^n(R) = I \cdot J^{2n}(R) = I \cdot J^n(R) \neq 0$$

Assim $I \cdot J^n(R) = I$ pelo minimalidade.

Por outro lado existe $x \in I$ com $x \cdot J^n(R) \neq 0$

Assim $x I J^n(R) \neq 0$ e $I = (x)$ pelo minimalidade

Como I é finit. gerado, assim $I \cdot J^n(R) = I$

implique que $J^n(R) = 0$ pelo lema de Nakayama.

Definição [Dimensão de anel].

Uma cadeia de ideais primos de R é sequencia estritamente crescente e finita

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq p_2 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n$$

com $p_i \in \operatorname{Spec} R$. O comprimento dela é n.

Definimos a dimensão de $R \neq 0$ [$\dim R$] como sendo o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos de R.

Exemplos

- Se $R = k$ um corpo $\Rightarrow \dim R = 0$.
- Se R é um DIP $\Rightarrow \dim R \leq 1$.
- Se R é Artiniano $\Rightarrow \dim R = 0$

Pois todo primo é maximal

Decomposição primaria

Nos vamos decompor os aneis Artinianos em produto dos aneis locais. Para isso vamos precisar o conceito de ideal <u>primario</u> que generaliza uma potencia de numero primo.

<u>Definição</u> Um ideal $Q \triangleleft R$ é chamado <u>primario</u> se $Q \neq R$ e se $ab \in Q$ assim ou $a \in Q$ ou $b^n \in Q$ para algum $n > 0$

<u>Obs.</u>
$Q \triangleleft R$ é primario $\Longleftrightarrow$ $R/Q \neq 0$, e div. de zero em R/Q são nilpotentes.

<u>Proposição</u> Se $Q \triangleleft R$ um ideal primario, assim $\sqrt{Q}$ é menor ideal primo contendo Q.

<u>Prova</u> $\sqrt{Q} = \bigcap\limits_{\substack{P \supseteq Q \\ P\text{-primo}}} P$, assim basta ver que $\sqrt{Q}$ é primo. Se $ab \in \sqrt{Q} \Rightarrow$ existe m t.q. $(ab)^m \in Q$
Mas Q é primario $\Rightarrow a^m \in Q$ ou $b^{mn} \in Q$
$\Rightarrow a \in \sqrt{Q}$ ou $b \in \sqrt{Q}$ $\square$

Se Q - é primario e $P = \sqrt{Q}$, dizemos que Q é P-<u>primario</u>

<u>Exemplo</u> [Ideais primarios = potencias de primos em DIP]

Se R um DIP, assim ideais primarios são exatamente ideais da forma (p^n) com $p \in R$ um elemento primo.

[Prova, Ex. p/ casa].

• <u>Exemplo 2</u> [Ideais primarios $\neq$ potencia de id. primo]

(a) Sejam $Q = (x^2, y)$, $P = (x, y)$ em $\mathbb{R}[x,y]$.

Assim $\sqrt{Q} = P$ e $\dfrac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2,y)} \simeq \dfrac{\mathbb{R}[x]}{x^2}$ – todo div de zero é nilp.

$\Rightarrow Q$ é primario, mas

$(x^2, xy, y^2) = P^2 \subsetneq Q \subsetneq P = (x,y)$

$\Rightarrow Q$ não é potencia de um primo.

(b) Seja $R = \mathbb{R}[x,y,z]/(xy - z^2)$ e $P = (\bar{x}, \bar{z}) \triangleleft R$

$R/P \simeq \mathbb{R}[y] \Rightarrow P$ é primo, pois R/P - dominio.

Mas $P^2 = (\bar{x}^2, \bar{x}\bar{z}, \bar{z}^2)$ não é primario, pois $\bar{x}\bar{y} = \bar{z}^2 \in P^2$, mas $\bar{x} \notin P$ e $\bar{y}^n \notin P$.

<u>Proposição</u> Seja $P \triangleleft R$ maximal. Se $Q \triangleleft R$ satisfaz uma das condições:

1) $\sqrt{Q} = P$ ou 2) $P^n \subset Q \subset P$ p/ algum n

Assim Q é P - primario.

Scanned with CamScanner

Prova

a) Temos que o nil radical de R/Q igual ao P/Q, logo $N(R/Q)$ é maximal assim [pelo Ex. 10, Lista 1] temos que todo elemento em R/Q é unidade ou nilpotente. Logo todo div. de zero em R/Q é nilpotente $\Rightarrow$ Q é primario.

b) Temos $\sqrt{P} = \sqrt{P^n} \subset \sqrt{Q} \subset \sqrt{P}$, logo $\sqrt{Q} = \sqrt{P} = P$. Agora resultado segue por a) $\square$

Agora vamos provar que todo ideal num anel Noetheriano pode ser escrito como intersesão de ideais primarios.

Def. [Decomposisão primaria]
Seja $I \triangleleft R$ um ideal. Decomposisão primaria de I é colesão finita $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ dos ideais primarios tal que

$$I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n.$$

Scanned with CamScanner

Proposição [Existencia da dec. primaria].
Num anel Noetheriano todo ideal tem decomposição primaria.

Prova Suponha que R Noetheriano, mas existe ideal sem decomposição primaria. Assim existe ideal $I \lhd R$ maximal com tal propriedade. No anel quociente R/I o ideal zero I/I é unico ideal sem decomposição primaria. Assim $(0) \lhd R/I$ não é primario e existem $a, b \in R/I$ com $ab=0$ mas $a \neq 0$ e $b^n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Como R é Noetheriano $\Rightarrow R/I$ tmb. é e a cadeia

$$\operatorname{ann}(b) \subset \operatorname{ann}(b^2) \subset \operatorname{ann}(b^3) \subset \dots$$

estabiliza-se, ou seja $\operatorname{ann}(b^n) = \operatorname{ann}(b^{n+1})$ para algum n. Como $(a) \neq 0$ e $(b^n) \neq 0$, assim ambos tem decomposição primaria assim $(a) \cap (b^n)$ tmb tem. Vamos mostrar que $(a) \cap (b^n) = 0$.

Se $x \in (a) \cap (b^n)$ assim $x = ca$ e $x = d\,b^n$ com alguns $c, d \in R/I$

Como $ab = 0 \Rightarrow 0 = cab = xb = d\,b^n$

$\Rightarrow d \in ann(b^{n+1}) = ann(b^n)$

$\Rightarrow x = d\,b^n = 0$. Assim $(a) \cap (b^n) = 0$

tem decomposição primária. Absurdo $\square$.

<u>Exemplo</u>

(a) Se R é DFU, assim todo ideal principal $I = (p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n})$ tem decomposição primária

$$I = (p_1)^{k_1} \cap \ldots \cap (p_n)^{k_n}$$

com $p_1, \ldots, p_n$ primos distintos em R.

(b) [Interpretação geométrica].

Se $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ decomposição primária de um ideal I em anel das coordenadas $A(X)$ da uma variedade X, assim

$$V(I) = V(Q_1 \cap \ldots Q_n) = V(Q_1) \cup \ldots \cup V(Q_n)$$
$$= V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_n)$$

com $P_i = \sqrt{Q_i}$, $i = 1, \ldots, n$

Scanned with CamScanner

Assim temos decomposisão da Subvariedade $Y = V(I)$ em união das variedades irredutiveis $V(P_i)$.

Aneis das coordenadas sempre Noetherianos (pelo T. da Base de Hilbert), assim tal decomposisão (em numero finito) em subvariedades irredutiveis sempre posivel.

Exemplo [Decomposisão não é unica].

(a) Por exemplo $(x^2) = (x) \cap (x^2)$

2 decomposisões primarias de (x^2) em $k[x]$.

(b) Em $\mathbb{R}[x,y]$ temos

$$(x^2, xy, y^2) = (x^2, y) \cap (x, y^2) \quad (*)$$

e todos 3 ideais tem mesmo radical $P = (x,y)$, assim todos são P-primarios pelo Proposisão (na pagina 5).

E $(*)$ é 2 decomposisões primarios diferentes. do mesmo ideal.

Scanned with CamScanner