Aula 15

Condições de cadeia.
Modulos de comprimento finito.

Lembrete. Um R-modulo tem comprimento

(a) finito, se $l_R(M) < \infty$, onde l_R é o tamanho da serie da composição de M isto é da cadeia

$$M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq M_0 = 0$$

Com M_i / M_{i-1} um R-modulo simples.

(b) Um R-modulo M é simples $\Longleftrightarrow$ $R/m \simeq M$, com m ideal maximal em R.

Proposição:

M tem comprimento finito $\Longleftrightarrow$ M é Artiniano e Noetheriano.

Prova: [$\Leftarrow$] Se $M \neq 0$, assim M contem submodulo maximal M_1 (pois é noetheriano), se $M_1 \neq 0$ assim M_1 tem submodulo maximal M_2, assim temos

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$$

não tem sequencias infinitas desse tipo, pois M é Artiniano, assim existe r, com $M_r = 0$.

Assim sequencia

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$$

é serie de composição do $M \Rightarrow$

M tem comprimento finito.

[$\Rightarrow$] Seja $\ell_R(M) = r$, se

$$C: M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_{s-1} \supset \dots$$

uma sequencia estritamente decrescente, assim para todo s a sequencia finita

$$C: M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_{s-1}$$ admite refinamento

C' que é serie de composição [Ex. p/ casa].

Assim $s = \# C \leq \# C' = r$. Assim C é finita.

Semelhante se

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{s-1} \dots$$ estritamente crescente

Assim q.q. sequencia finita

$$C: M \supset M_{s-1} \supset \dots \supset M_1 \supset M_0 = 0$$ tem refinamento

C' é serie da composição

$$\Rightarrow \quad s = \# C \leq \# C' = r.$$

$\square$

Corolarios:

- Q.q. modulo finito tem comprimento finito.
- Grupo abeliano G tem comprimento finito $\Leftrightarrow$ G é finito.

Prova: [$\Leftarrow$] É obvio, pois G é finito.

[$\Rightarrow$] Se $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_r = 0$, assim G_i / G_{i+1} é grupo finito abeliano, que é modulo simples, assim $\# G_i / G_{i+1} = p$.

Agora $\# G_i = \# G_{i+1} \cdot \# G_i / G_{i+1}$

$$\Rightarrow \quad \# G = \prod_{i=1}^{r-1} G_i / G_{i+1} < \infty \, //.$$

Teorema [Jordan-Hölder].

Seja M um modulo de comprimento finito. Se $(M_i)_{i=0}^{n}$ e $(M_i')_{i=0}^{n}$ são 2 series de composição então existe uma permutação σ dos indices $1, \dots, n$ tal que $M_{i+1}/M_i \simeq M'_{\sigma(i)+1}/M'_{\sigma(i)}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Prova. Ex. p/ casa.

Teorema 2 Seja

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to \dots \to M_{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} M_q \to 0$$

uma s.e. dos R-modulos de comprimento finito, assim $\sum_{i=1}^{q} (-1)^i \ell_R(M_i) = 0$.

Prova Casos $\boxed{q = 1, 2}$ o resultado é trivial.

Suponha que $\boxed{q=3}$: $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$

Assim $M_3 \simeq M_2/M_1$. Se

$C_S: M_3 = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_s = 0$ é uma serie de composição de $M_3 \simeq M_2/M_1$, assim p/ todo modulo $N_i \in C_S$ tem submodulo N_i'/M_1 de M_2/M_1 e $M_2 = N_0' \supset N_1' \supset \dots \supset N_s' = M_1$

Se $C_1: M_1 = P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_t$ é uma serie de composição de M_1, assim

$$C_2: M_2 = N_0' \supset N_1' \supset \dots \supset N_s' = M_1 =$$
$$= P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_t = 0$$

é serie de composição de M_2, assim

$$\ell_R(M_2) = \ell_R(M_1) + \ell_R(M_3).$$

$$\Rightarrow -\ell_R(M_1) + \ell_R(M_2) - \ell_R(M_3) = 0$$

Considere caso geral. Seja $k_i = \ker f_i$, assim temos sequencias exatas curtas:

$$0 \to k_1 \to M_1 \xrightarrow{f_1} k_2 \to 0$$
$$0 \to k_2 \to M_2 \xrightarrow{f_2} k_3 \to 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$0 \to k_{q-1} \to M_{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} M_q \to 0$$

Pelo considerações acima temos:

$$0 + \ell_R(M_1) - \ell_R(k_2) = 0$$
$$-\ell_R(k_2) + \ell_R(M_2) - \ell_R(k_3) = 0$$
$$\vdots$$
$$-\ell_R(k_{q-1}) + \ell_R(M_{q-1}) - \ell_R(M_q) = 0$$

Portanto $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} (-1)^i \, \ell_R(M_i) = 0$ $\square$.

<u>Corolarios</u>:

Aplicando o Teorema 2 no caso

$$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$$

temos que $\ell_R(M_1 \oplus M_2) = \ell_R(M_1) + \ell_R(M_2)$.

e semelhante $\ell_R(M_1 \oplus \dots \oplus M_n) = \ell_R(M_1) + \dots + \ell_R(M_n)$ //

Aneis Noetherianos

<u>Lembrete</u>: As seguintes condições são equivalentes:

1) R é anel Noetheriano [Noetheriano como R-mod.]
2) Todo conjunto não vazio de ideais de R tem um elemento maximal.
3) Todo ideal de R é finit. gerado.

Na aula pasada a gente provou que:

<u>Proposição</u> Seja R um anel Noetheriano:

1) Se M é um R-modulo f.g $\Rightarrow$ M é Noetheriano
2) Se $I \triangleleft R$ um ideal de R $\Rightarrow$ R/I - anel Noetheriano

<u>Proposição</u>: Seja R um anel Noetheriano.

a) Se $f: R \to S$ homomorfismo de aneis sobrej. assim S é Noetheriano.

b) Se $R \subseteq S$ subanel de S e S é f.g. como R-modulo, assim S é anel Noetheriano.

c) Se S conjunto mult. fechado $\Rightarrow$ $S^{-1}R$ é anel Noetheriano.

<u>Prova</u> a) $S \simeq \frac{R}{\ker f}$, assim é Noetheriano pelo prop. anterior.

b) S é Noetheriano como R-modulo [pois f.g.]. Mas ideais em S são S-submodulos de S portanto tmb. são R-submodulos de S. Logo toda cadeia de ideais em S estabiliza.
$\Rightarrow$ S é Noetheriano como anel.

c) Um ideal de $S^{-1}R$ é da forma $S^{-1}I$ p/ algum ideal $I \lhd R$. Se I é f.g assim $S^{-1}I$ é f.g. tmb (por $\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_n}{1}$, com $x_1, \dots, x_n$ são geradores de I). Assim $S^{-1}R$ é Noetheriano $\square$

<u>Corolario</u> Se R-Noetheriano, assim R_p é Noetheriano para todo $P \in \operatorname{Spec} R$.

<u>Obs.</u> Subanel de anel Noetheriano não sempre Noetheriano (!). Por exempo

Noetheriano

$$k[x_1, \dots, x_n, \dots] \subset k(x_1, \dots, x_n, \dots)$$

Não é Noetheriano

corpo de funções racionais em numero infinito de variaveis

Teorema [da Base do Hilbert].

Se R é anel Noetheriano $\Rightarrow$ $R[x]$ é anel Noetheriano.

Prova Suponha que $R[x]$ não é Noetheriano.

Assim existe ideal I que não é fin. ger.

Escolha $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}, \dots \in I$ de modo que

f_0 — polinomio com grau minimal em I

$\vdots$

f_{k+1} — — // — // — //— // — em $I \setminus \langle f_0, \dots, f_k \rangle$

$\vdots$

Escreva $f_k = a_k \cdot x^{d_k}$ + [termos com grau baixo]

$d_k \leq d_{k+1}$ pelo construção.

Como R é Noetheriano, assim a cadeia

$$(a_0) \subset (a_0, a_1) \subset \dots \subset \dots \subset (a_0, a_1, \dots, a_k) \subset \dots$$

estabiliza-se, i.e.

$$a_{n+1} = c_0 a_0 + \dots + c_n \cdot a_n,$$ para algum n, e $c_0, \dots, c_n \in R$.

Assim temos que

$$f_{n+1}' := f_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k x^{d_{k+1} - d_k} \cdot f_k$$

tem coeficiente 0 pelo $x^{d_{n+1}}$, assim

$\text{grau } f'_{n+1} < \text{grau } f_{n+1}$, e como

$f_{n+1} \notin \langle f_0, \dots, f_n \rangle$ assim $f'_{n+1} \notin \langle f_0, \dots, f_n \rangle$

Contradição pela escolha do f_{n+1}.

Assim $R[x]$ é Noetheriano $\square$.

<u>Corolarios</u>: Se R é Noetheriano, assim

a) $R[x_1, \dots, x_n]$
b) $R[x_1, \dots, x_n]/I$

são Noetherianos.

<u>Prova</u> a) segue por indução, pois

$$R[x_1, \dots, x_n] \simeq R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$$

b) segue do a).

<u>Obs.</u> Se R é Noetheriano $\Rightarrow R[[x]]$ é Noetheriano tmb.

<u>Prova</u> No mesmo jeito como T. da Base do Hilbert considerando "grau minimal".

(Exercicio p/ casa).