Aula 14

Condições de cadeia

Nas aulas pasadas a gente viu certas condições p/ modulo ser finitamente gerado (por exemplo, Prop. Cayley-Hamilton, Lema Nakayama).

Assim vamos estudar os questões de finitude com mais detalhes.

Idea principal: Estudar as cadeias de modulo dado e verificar quando elas tem que terminar apos numero finito dos pasos.

Primeiramente vamos provar o seguinte fato:

Fato: Seja Ω um conjunto parcialmente ordenado (com ordem $\leq$). As seguintes condições são equivalentes:

1) Toda sequencia crescente $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ em Ω é estacionaria, i.e. existe n, tal que

$$x_n = x_{n+1} = \ldots = \ldots$$

2) Todo subconjunto não vazio de Ω possui elemento maximal.

Prova Exercicio p/ casa.

Definição [Modulos Noetherianos e Artinianos].

Seja M um R-modulo.

(a) M é chamado Noetheriano se toda cadeia ascendente (cca):

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

de submodulos de M se estabiliza, ou seja existe n tal que $M_k = M_n$, com $k \geq n$

(b) Semelhante, M é chamado Artiniano, se toda cadeia descendente (ccd)

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots.$$

de submodulos se estabiliza, ou seja existe n, tal que $M_n = M_k$, $k \geq n$.

— // — —

Anel R é chamado Noetheriano, ou Artiniano caso R tem essa propriedade como R-modulo.

Obs. Se Ω é conjunto de submodulos de M, assim

a) M é Noetheriano $\Longleftrightarrow$ Ω tem elemento maximal com "$\leq$" = "$\subseteq$"

— // — , Fato — — — // — //

b) M é Artiniano $\Longleftrightarrow$ Ω tem elemento minimal com "$\leq$" = "$\supseteq$"

Proposição

R-modulo M é Noetheriano $\Longleftrightarrow$ todo submodulo de M é f.g.

Prova

[$\Rightarrow$] Seja N um submodulo de M e
Ω conjunto de todos submodulos f.g. de N.
Assim Ω não vazio (contem 0), logo
tem elemento maximal N_0. Se $N_0 \neq N$, assim
Considere $N_0 + An$, com $n \in N \setminus N_0$.
Este modulo é f.g. e contem N_0 (estritamente)
Contradição. Assim $N_0 = N$ e N é f.g.

[$\Leftarrow$] Seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ uma cca de M.
$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ é um submodulo de M, logo é f.g.
Sejam $x_i \in M_{n_i}$ são geradores de N e
$n = \max_i n_i$, logo $N = M_n$ e portanto
cadeia se estabeliza $\square$

Obs. Proposição acima torma modulos Noetherianos mais "uteis" que Artinianos.
Mas tem varios propriedades que aplicam-se igualmente a modulos Artinianos e Noetherianos.

Exemplos:

a) Todo corpo é ambos Noetheriano e Artiniano, pois tem somente 2 ideais (= submodulos) 0 e k.

b) Anel $R = \mathbb{Z}$ é Noetheriano mas não é Artiniano, pois se $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ temos

$$(a) \supset (a^2) \supset \dots \supset (a^n) \supset \dots$$ cadeia infinita descendente.

c) Todo (DIP) é Noetheriano, pois todo ideal é f.g

d) Anel de polinomios $k[x_1, \dots, x_n, \dots]$ com numero infinito de variaveis não é Noetheriano e não é Artiniano.

e) Vamos mostrar que se R é Noetheriano assim $R[x]$ e $R[[x]]$ são Noetherianos tmb. Mas a mesma propriedade não vale para "Artiniano", pois

$$(x) \supset (x^2) \supset (x^4) \dots$$ é cadeia infinita descendente.

Proposição. Seja $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$

uma s.e.c. de R-modulos. Assim:

a) M é Noetheriano $\iff$ M', M'' são Noetherianos

b) M é Artiniano $\iff$ M', M'' são Artinianos.

Prova. Vamos provar a), [b) é Ex. p/ casa].

[$\Rightarrow$]. Sejam $M_1' \subseteq M_2' \subseteq \dots$ e

$M_1'' \subseteq M_2'' \subseteq \dots$ duas cadeias

de submodulos de M' e M''. Logo

$f(M_1') \subseteq f(M_2') \subseteq \dots$ são cadeias de submodulos

e $g^{-1}(M_1'') \subseteq g^{-1}(M_2'') \subseteq \dots$ de M.

Como M é Noetheriano, assim ambos estabilizam.

Mas f é injetora $\Rightarrow$ $f^{-1}f(M_i') = M_i'$

g é sobrejetora $\Rightarrow$ $g\, g^{-1}(M_i'') = M_i''$

Logo cadeias originais estabilizam tmb. e

M', M'' são Noetherianos.

[$\Leftarrow$] Seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ cadeia de submodulos de M

Assim $f^{-1}(M_1) \subseteq f^{-1}(M_2) \subseteq \dots$ cadeias em M', M''

$g(M_1) \subseteq g(M_2) \subseteq \dots$

Como ambos M', M'' são Noetherianos, que se estabelizam

a partir algum n, suficiente grande.

Logo $f^{-1}(M_n) = f^{-1}(M_{n+1}) = \dots$

$g(M_n) = g(M_{n+1}) = \dots$

Vamos mostrar que $M_n = M_{n+1}$. Basta ver que $M_{n+1} \subseteq M_n$. Se $x \in M_{n+1} \Rightarrow$ existe $y \in M_n$, com

$g(y) = g(x) \Rightarrow g(x-y) = 0$

$\Rightarrow x - y \in \ker g = \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow$ Existe $z \in M'$, tal que $f(z) = x - y \in M_{n+1}$

logo $z \in f^{-1}(M_{n+1}) = f^{-1}(M_n)$

$\Rightarrow f(z) \in M_n \Rightarrow x - y \in M_n$

Como $y \in M_n$, assim $x \in M_n$ tmb.

Logo $M_{n+1} = M_n \Rightarrow M$ é Noetheriano $\square$.

Corolario. Se $(M_i)_{i=1}^{n}$ são R-modulos Noetherianos (resp. Artinianos), assim $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ é Noetheriano (resp. Artiniano).

Prova. Por indução usando o fato que a prop. anterior implique que $M \oplus N$ é Noetheriano (Artiniano) se M, N são Noetherianos (Artinianos).

[aplique $0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0$].

Corolario 2. Se R um anel Noetheriano (resp. Artiniano) e M um R-modulo f.g. Assim M é Noetheriano (resp. Artiniano).

Prova Se $M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$, assim

$$\varphi : R^k \longrightarrow M$$
$$(a_1, \dots, a_k) \longmapsto (a_1 m_1 + \dots + a_k m_k) \text{ sobrejetor}$$

Logo temos sequencia exata

$$0 \to \ker\varphi \to R^k \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

com $R^k = \underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{k}$ é Noetheriano (Artiniano) pelo Corolario 1 $\Rightarrow$ M é tmb. $\square$.

Corolario 3. Se R um anel Noetheriano (resp. Artiniano) e I um ideal em R. Assim R/I é Noetheriano (resp. Artiniano).

Prova: Considere $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ e aplique Proposição acima observando que R/I é Noetheriano (resp. Artiniano) como R/I-modulo (usando a Teorema de corespondência).

Comprimento de modulos.

Comprimento de modulo é um analogo da "dimensão". O que vamos mostrar é que:

M tem comprimento finito $\Longleftrightarrow$ M é Noetheriano e Artiniano.

Def. Uma serie de composição de M é uma cadeia maximal de submodulos de M tais que

$$M = \underbrace{M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \dots \supsetneq M_0}_{\text{inclusões estritas.}} = 0$$

isto é não há submodulos entre M_i e M_{i-1} ou seja M_i/M_{i-1} é simples (não possui submodulos proprios).

Definimos comprimento do modulo $\ell_R(M)$ como sendo o minimo entre todos ~~series~~ comprimentos das series de composição de M.

Exemplo. Seja k - um corpo.

Um k-espaço vetorial é simples $\Longleftrightarrow$ tem dimensão 1.

Assim, supondo que $\dim_k V = n$, a serie de composição de V é cadeia

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

$\dim_k V_i = i$, logo $\ell_k(V) = n = \dim_k V$.

<u>Exemplo 2</u> $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, assim

$M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \supset 0$ é serie da composição

pois $\dfrac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - simples como $\mathbb{Z}$-modulos.

e $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ - simples

<u>Lema</u>. Um R-modulo M é simples $\Leftrightarrow$ $M \simeq R/m$, com m ideal maximal em M

<u>Prova</u>. [$\Leftarrow$] É Teorema de correspondencia

[$\Rightarrow$] Se M é simples e $x \in M$ q.q. elemento não nulo, assim $M = Rx = \langle x \rangle$.

Logo $\varphi : R \to M$, $a \mapsto ax$ é sobrejetor

e $M \simeq \dfrac{R}{\ker\varphi}$, com $\ker\varphi$ - maximal $\boxtimes$