# Aula 13

## Revisão 2

## 5. Modulos

a) Noção de modulo, homomorfismo, geradores de um modulo.

Noção de modulo generalize noção de espaço vetorial. Em particular:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{modulos sobre} \\ \text{corpos}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\text{espaços vetorias}\right\}.$$

b) Na forma natural definam-se: nucleo, imagem e modulos quocientes: (de um homomorfismo)

c) Um modulo livre é modulo isomorfo a $\bigoplus_{i \in I} M_i$, onde cada $M_i \simeq R$ como modulo.

Em particular, modulo livre finit. gerado tem forma $R^n = \underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{n\text{-vezes.}}$

d) Lema de Nakayama;

Prop.

R-modulo $M$ é f.g. $\Leftrightarrow$ $M \simeq \frac{R^n}{N}$, para algum $n > i$
e $N \subset R^n$.

Proposição ["Teorema de Cayley-Hamilton"].

Sejam: $M$ - um R-modulo f.g.
$I \triangleleft R$ - um ideal
$\varphi : M \to M$, homom. t.q. $\varphi(M) \subset IM$

$\Rightarrow$ $\chi(\varphi) = 0$, para algum polinomio monico
$\chi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in R[x]$.

Lema [de Nakayama].

Sejam: $M$ - um R-modulo f.g.
$I \triangleleft R$ um ideal em $J(R)$ ← radical do Jacobson

(a) Se $IM = M \Rightarrow M = 0$.

(b) Se $M = IM + N \Rightarrow M = N$.

(ou seja $IM$ consiste de "não-geradores" de $M$).

e) Sequencias exatas

$$\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \ldots$$

com $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$, para todo $i$.

**Lema** [de Serpente]. Seja

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \arrow[r, "\psi'"] & P' & \end{tikzcd}$$

diagrama comutativa de R-modulos com as linhas exatas. Assim existe s.e. longa

$$\ker \alpha \xrightarrow{\overline{\varphi}} \ker \beta \xrightarrow{\overline{\psi}} \ker \gamma \xrightarrow{\delta} \frac{M'}{\operatorname{Im} \alpha} \xrightarrow{\overline{\varphi'}} \frac{N'}{\operatorname{Im} \beta} \xrightarrow{\overline{\psi'}} \frac{P'}{\operatorname{Im} \gamma}$$

**Lema** $\operatorname{Hom}_R(-, N)$ é exato a esquerda

$\operatorname{Hom}_R(N, -)$ é exato a esquerda

isto é dada s.e. curta

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \to 0$$

temos

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \to \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \to \operatorname{Hom}(M_1, N)$$

e

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(N, M_1) \to \operatorname{Hom}_R(N, M_2) \to \operatorname{Hom}(N, M_3)$$

são sequencias exatas.

Volta tmb vale caso as sequencias com Hom's são exatas para todo $N$ (!!).

## f). Produtos tensoriais

Ideia (principal). Dados dois $R$-modulos $M$ e $N$, o produto tensorial $M \otimes_R N$ é um novo $R$-modulo tal que:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Mapas } R\text{-lineares} \\ M \otimes_R N \to P\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{matrix}\text{Mapas } R\text{-bilineares} \\ M \times N \to P\end{matrix}\right\}$$

para todo $R$-modulo $P$.

Proposição $M \otimes_R N$ existe e unico (a menos unico isomorfismo).

Propriedades:

a) $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$, b) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$

c) $(M \oplus N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R P \oplus N \otimes_R P$

d) $R \otimes_R M \simeq M$, e) $M \otimes_R R/I \simeq M/IM$, $I \triangleleft R$.

Proposição (Adjunção entre Hom e $\otimes$).

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$$

Proposição [$- \otimes_R N$ é exato à Direita].

Se $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ exata

$$\Rightarrow \quad M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes id} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes id} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

Scanned with CamScanner

**Def.** [ Modulo plano ].

R-modulo $M$ é plano se $- \otimes_R M$ é exato,

ou seja $f \otimes id : N \otimes_R M \longrightarrow N' \otimes_R M$ é injetivo

para todo $f : N \longrightarrow N'$ injetivo.

**Ex.** a) livres $\Rightarrow$ planos

b) "plano" $\Rightarrow$ "livre de torsão"

$\not\Leftarrow$ em geral, mas vale, por exemplo em (DIP).

## g) Álgebras

**Def.** [Uma R-algebra] é um anel $S$

- junto com homomorfismo $f : R \to S$ (neste caso $S$ é um R-modulo).
- R-algebra $S$ é plana, se $S$ é plano como R-modulo.

**Prop.** Se $f : R \to S$, $g : S \to T$ álgebras planas

$\Rightarrow g \circ f : R \to T$ é alg. plana.

**Prop.** Se: $f: R \to S$ uma alg plana

$M$ - um $R$-modulo plano

$\Rightarrow$ $S \otimes_R M$ é $S$-modulo plano.

h) Localização

Seja $S \subset R$ um conjunto multiplicamente fechado (isto é $1 \in S$, e $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$).

Defina $S^{-1}R := {R \times S}/{\sim}$, com

$(a,s) \sim (a', s') \iff u(as' - a's) = 0$, pr algum $u \in S$.

Na mesma maneira define-se $S^{-1}M$ para um $R$-modulo $M$, temos — // —

**Lema:** $S^{-1}M \simeq M \otimes_R S^{-1}R$.

— // —

**Prop.** [ $S^{-1}(-)$ é funtor exato ].

Se $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ exato

$\Rightarrow$ $0 \to S^{-1}M_1 \to S^{-1}M_2 \to S^{-1}M_3 \to 0$ exato

— // —

Em particular isso implique que localização commuta com nucleos, conucleos, imagens ....

# Localização e ideais primos

Sejam: $P \triangleleft R$ um ideal primo

$S = R \setminus P$ – conj. mult. fechado.

$R_p := S^{-1}R$, $M_p := S^{-1}M$ – localizações

**Prop.** As seguintes afirm são equivalentes:

a) $f: M \to N$ é injetivo

b) $f_p: M_p \to N_p$ é injetivo p/ todo $p \in \operatorname{Spec} R$

c) $f_m: M_m \to N_m$ é inj. p/ todo $m \in \operatorname{Specm} R$.

**Prop.** — // — // — // —

a) $M$ é plano

b) $M_p$ é plano p/ todos $P \in \operatorname{Spec} R$

c) $M_m$ é plano p/ todos $m \in \operatorname{Specm} R$.

**Teorema:** Mapa $\operatorname{Spec} f: \operatorname{Spec} R_p \to \operatorname{Spec} R$

é injetor com imagem

$$D_S := \{ P \in \operatorname{Spec} R \mid P \cap S = \emptyset \}.$$

i.e. $\left\{ \begin{array}{c} \text{ideais primos} \\ \text{em } R_p \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{ideais primos} \\ \text{de } R \text{ que não interceptam } S \end{array} \right\}$.