Aula 12

Revisão 1

0. Noções básicas.

a) Aneis, ideais, aneis quocientes, homomorfismos

b) Teorema [de Correspondência entre ideais]

Seja R um anel comutativo, $I \triangleleft R$ ideal em R.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{ideais } J \text{ em } R \text{ que} \\ \text{contem } I\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{ideais } \overline{J} \text{ em} \\ R/I\end{array}\right\}$$

$$J = \pi^{-1}(\overline{J}) \longleftarrow \overline{J}$$

com $\pi : R \to R/I$ $(a \mapsto a + I)$, hom canonico.

c) $\varphi : R \to S$ um homomorfismo entre aneis

- $\ker\varphi = \varphi^{-1}(0)$ – ideal em R.
- $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(R)$ – subanel em S.
- $\operatorname{Im}\varphi = R/\ker\varphi$.

d) Divisores de zero, dominio, elementos nilpotentes, unidades.

e) Ideais principais, dominios de ideais principais

1. Ideais primos e maximais

a) Definições, critério:

- $P \lhd R$ é primo $\Leftrightarrow$ R/P é um domínio.
- $M \lhd R$ é maximal $\Leftrightarrow$ R/M é um corpo.

b)
- M é maximal $\Rightarrow$ M é primo.
- $0 \lhd R$ é primo $\Leftrightarrow$ R é domínio
- $f: R \to S$ homomorfismo, $P \lhd S$ primo $\Rightarrow$ $f^{-1}(P) \lhd R$, primo

c)
- Teorema. Todo anel R contem pelo menos um ideal maximal.
- Corolario Se $I \neq R$ ideal $\Rightarrow$ Existe $M \lhd R$ maximal que contem I.

d)
- Se R tem unico ideal maximal $\Rightarrow$ R é chamado anel local
- Se $M \neq R$ tal que todo $x \in R \setminus M$ é unidade $\Rightarrow$ R é anel local.
- se $M \lhd R$ maximal, todo $x \in 1+M$ unidade $\Rightarrow$ R é local.

e) [Radicais].

- Nilradical:

$N(A) = \{$ elementos nilpotentes em $R\}$

$= \bigcap$ todos ideais primos.

- Radical do Jacobson:

$J(R) = \bigcap$ todos ideais maximais

$= \{x \in R \mid 1 - xy$ é unidade p/ todo $y\}$.

- $N(R) \subseteq J(R)$ para todo anel R.

2. Operações entre ideais

a) • Soma $I + J$, produto $I \cdot J$, interseção $I \cap J$

- $I \cdot J \subseteq I \cap J$.
- I, J são coprimos se $I + J = R$, neste caso

$I \cdot J = I \cap J$.

b) Teorema [Chinese de Restos]

R um anel, $I_1, \dots, I_k$ ideais dois a dois coprimos

$$\Rightarrow \frac{R}{I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_k} \simeq \frac{R}{I_1} \times \frac{R}{I_2} \times \dots \times \frac{R}{I_k} \text{ //}$$

c) [Radical de um ideal].

- $\mathrm{rad}(I) = \sqrt{I} = \{a \in R \mid a^n \in I$ para algum $n>0\}$.
- $\mathrm{rad}(I) = \pi^{-1}(N(R/I))$, $\pi : R \twoheadrightarrow R/I$
- $\mathrm{rad}(I) = \bigcap$ primos que contem I.
- I é chamado radical, se $\mathrm{rad}(I) = I$.
- I é radical $\Leftrightarrow N(R/I) = 0$.

3. Noções básicas da Geom. Algebrica

a) Espaço afim (sobre corpo k)

$$\mathbb{A}^n_k := \{(c_1, \dots, c_n) \mid c_i \in k,\ 1 \leq i \leq n\}.$$
$\parallel$ k^n como conjunto.

b) Variedade afim: Se $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ q.q. con

$$V(S) := \{\underline{c} \in \mathbb{A}^n_k \mid f(\underline{c}) = 0, \text{ para todo } f$$

c) Dada variedade $X \subset \mathbb{A}^n_k$, defina ideal da variedade X.

$$I(X) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0,\ x \in X\}.$$

$$A(X) := \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(X)}$$

anel de funções polinomiais em X.

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ideais das} \\ \text{subvariedades de } X \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{ideais radicais} \\ \text{em } A(X) \end{array} \right\}$

d) Interpretação geometrica de operações entre ideais:

- $V(I+J) = V(I) \cap V(J)$.
- $I(Y \cup Z) = I(Y) \cap I(Z)$, $Y, Z \subset X$.
- $I(Y \setminus Z) = I(Y) : I(Z)$.

Se $k = \bar{k}$, assim

- "ideais maximais em $A(X)$" $\longleftrightarrow$ pontos em X
- $I(X)$ é primo $\longleftrightarrow$ X irredutível.

4. Espectro dos aneis

a) Espectro de um anel dado

$$\operatorname{Spec} R = \{\text{ideais primos em } R\}.$$

b) Se $\varphi: R \to S$ um homomorfismo,

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Spec}\varphi: \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$$
$$P \mapsto \varphi^{-1}(P).$$

c) $\operatorname{Spec} R = \emptyset \iff R = 0$

d) $\operatorname{Spec} R$ é espaço topologico com (Topoligia de Zariski):

"fechados": $V(I) := \{P \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq P\}$
I ideal em R.

"abertos": $D(a) = \{P \in \operatorname{Spec} R \mid a \notin P\}$
(base) $a \in R$.

e) · $\operatorname{Spec}\varphi$ é continuo

· $\operatorname{Spec} R$ é compacto.

f) $\operatorname{Specm} R = \{\text{maximais em } R\} \subset \operatorname{Spec} R$ espectro maximal