Aula 11

Localização 2

Seja: R um anel comutativo
$P \lhd R$ um ideal primo
M – um R-modulo

Considere: $S = R \setminus P$, e as localizações correspondentes

$$R_p := S^{-1}R, \qquad M_p := S^{-1}M \underset{\uparrow}{\simeq} M \otimes_R S^{-1}R = M \otimes_R R_p$$

aula pasada

Uma propriedade $\mathcal{P}$ de um anel R (ou R-modulo M) é dita propriedade local, se

A (ou M) tem propriedade $\mathcal{P}$ $\Longleftrightarrow$ A_P (ou M_P) tem $\mathcal{P}$ para todo $P \in \operatorname{Spec} A$.

Proposição Seja M um R-modulo, então são equivalentes:

a) $M = 0$

b) $M_P = 0$, para todo $P \in \operatorname{Spec} R$

c) $M_m = 0$, para todo $m \in \operatorname{Specm} R$

espectro maximal.

<u>Prova</u> Claramente a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c)

Suponha que vale c) e que $M \neq 0$.
Seja x elemento não nulo em M, e seja

$I = \mathrm{Ann}(x) := \{a \in R \mid ax = 0\}$, assim

$I \triangleleft R$ ideal proprio, logo está num ideal maximal $\mathfrak{m}$. Considere o elemento

$\frac{x}{1} \in M_{\mathfrak{m}}$, Como $M_{\mathfrak{m}} = 0 \Rightarrow tx = 0$

para algum $t \in S = A \setminus \mathfrak{m}$. Assim $t \in \mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$

Contradição. $\square$

O seguinte Teorema implique a reciproca importante do Teorema que provaremos na aula pasada (que diz que S^{-1} preserva sequencias exatas)

<u>Teorema</u> O complexo de R-modulos

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \quad \text{é exato}$$

Se e somente se, suas localizações

$$M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \quad \text{são exatas}$$

para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}\, R$. Analogamente para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$

Prova Considere R-modulo $\frac{\ker g}{\operatorname{Im} f}$.

Segue (Pelo Ex./p/ casa) que

$$\left(\frac{\ker g}{\operatorname{Im} f}\right)_m \underset{\text{c)}}{\simeq} \frac{(\ker g)_m}{(\operatorname{Im} f)_m} \underset{\text{b)}}{\simeq} \frac{\ker g_m}{\operatorname{Im} f_m}$$

O funtor localização preserva inclusões $\Rightarrow$

$\operatorname{Im} f_m \subseteq \ker g_m$, ou seja os quocientes acima bem definidos. O complexo é exato se e somente se $\frac{\ker g}{\operatorname{Im} f} = 0$. Assim

$$\frac{\ker g}{\operatorname{Im} f} = 0 \underset{\text{Prop. acima}}{\Leftrightarrow} \frac{\ker g_m}{\operatorname{Im} f_m} = 0, \quad m \in \operatorname{Specm} R$$

$\Leftrightarrow$ $M'_m \xrightarrow{f_m} M_m \xrightarrow{g_m} M''_m$ é exato para todos $m \in \operatorname{Specm} R$.

$\square$

Como consequencia temos:

Proposição Seja $f: M \to N$ um R-homomorf. então são equivalentes:

a) f é injetiva (sobrejetiva, bijetiva)

b) $f_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ é injetiva (sobre, bij.) para todo $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R$

c) $f_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ é injetiva (sobre, bij.) para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$.

Prova Ex/ p/ casa.

Proposição Para q.q. R-modulo M, as seguintes afirm. são equivalentes:

a) M é R-modulo plano;

b) $M_{\mathfrak{p}}$ é $R_{\mathfrak{p}}$-modulo plano, p/ todos $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R$

c) $M_{\mathfrak{m}}$ é $R_{\mathfrak{m}}$-modulo plano, p/ todos $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$.

Prova Ex/ p/ casa.

Localização e ideais primos

Teorema

Sejam: R - um anel

$S \subseteq R$ - conjunto multiplicativo

$f: R \to S^{-1}R$ - mapa localização.

(a) Se $I \trianglelefteq R$ um ideal então

$S^{-1}I \subseteq S^{-1}R$ é um ideal

Reciprocamente, todo ideal $J \subseteq S^{-1}R$ é da forma

$S^{-1}I$ para algum ideal $I \trianglelefteq R$.

(b) O mapa de espectros induzido por f

$$\operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} S^{-1}R \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$$

é injetor e tem como imagem o conjunto

$$D_S := \{ P \in \operatorname{Spec} R \mid P \cap S = \emptyset \}$$

dos ideais primos P que não interceptam S.

A preimagem de $P \in D_S$ é dada por $S^{-1}P$

(i.e. os ideais primos de $S^{-1}R$ estão em 1-a-1 correspondencia com os ideais primos de R que não interceptam S).

Prova

(a) Como localização é funtor exato, preserva injetividade $\Rightarrow$

$I \subseteq R \Rightarrow S^{-1}I \subseteq S^{-1}R$ é um ideal

Reciprocamente, dado $J \subseteq S^{-1}R$, temos que $I = f^{-1}(J)$ é um ideal de R. Vejamos que $\boxed{S^{-1}I = J}$:

$[\subseteq]$ se $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$ com $a \in R$, $s \in S$, assim existem $i \in I$, $s' \in S$ com $\frac{a}{s} = \frac{i}{s'}$, ou seja

$tas' = tsi$ em I, logo $f(ats') \in J \subseteq S^{-1}R$

ou seja $\frac{ats'}{1} \in J$. Mas $ts' \in S$ é unidade em $S^{-1}R$

$\Rightarrow$ possui inverso $\frac{1}{ts'}$. Logo $\frac{1}{ts'} \cdot \frac{ats'}{1} \in J$.

Assim $\frac{a}{1} = f(a) \in J$. Logo

$\frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot f(a) \in J$. Assim $S^{-1}I \subseteq J$.

$[\supseteq]$ Se $\frac{b}{s} \in J$, com $b \in R$, $s \in S$ então $f(b) = \frac{s}{1} \cdot \frac{b}{s}$ está em J, ou seja, $b \in I$ e portanto $\frac{b}{s} \in S^{-1}I$.

(b) Observe que para $P \in D_S$, $a \in R$, $s \in S$ temos

$(*)$ $\boxed{\frac{a}{s} \in S^{-1}P \iff a \in P}$

$[\Leftarrow]$ é obvia. Por outro lado, se $\frac{a}{s} \in S^{-1}P$ assim existem $x \in P$ e $t \in S$ com $\frac{a}{s} = \frac{x}{t}$ em $S^{-1}R$

logo existe $r \in S$ tal que $r \cdot (at - xs) = 0$, ou seja

$rta = rsx$ em P. Como P primo, assim $r \in P$ ou $t \in P$ ou $a \in P$.
Mas $P \in D_S$, ou seja $P \cap S = \emptyset$, portanto $r, t \notin P$ então $a \in P$. Assim [$\Rightarrow$] segue-se.

- $\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{Spec}\, f) \subseteq D_S}$:

Seja $P \in \mathrm{Im}(\mathrm{Spec}\, f) \Rightarrow$ existe $Q \in \mathrm{Spec}\, S^{-1}R$, com $P = (\mathrm{Spec}\, f)(Q) \Rightarrow P = f^{-1}(Q)$.
Se existe $x \in S \cap P \Rightarrow f(x) \in Q$ o que é absurdo pois $f(x) \in \mathcal{U}(S^{-1}R)$.

- $\boxed{\text{Se } P \in D_S \text{ então } S^{-1}P \in \mathrm{Spec}\, S^{-1}R}$:

Observe que $S^{-1}P$ é ideal proprio em $S^{-1}R$ (caso contrario $\frac{1}{1} \in S^{-1}P$ que contradiz (*)).
Dados $a, a' \in R$, $s, s' \in S$ temos:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} \in S^{-1}P \Leftrightarrow \frac{aa'}{ss'} \in S^{-1}P \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} aa' \in P$$
$$\Leftrightarrow a \in P \text{ ou } a' \in P \Leftrightarrow \frac{a}{s} \in S^{-1}P \text{ ou } \frac{a'}{s'} \in S^{-1}P$$

ou seja $S^{-1}P$ é um ideal primo de $S^{-1}R$.

- Finalmente, mostraremos que o mapa

$$\mathrm{Spec}\, f : \mathrm{Spec}\, S^{-1}R \longrightarrow D_S \text{ é bijeção}$$

com inversa $\qquad P \longmapsto S^{-1}P$.

Composição

$$D_S \longrightarrow \operatorname{Spec} S^{-1}R \xrightarrow{\operatorname{Spec} f} D_S$$
$$P \longmapsto S^{-1}P \longmapsto (\operatorname{Spec} f)(S^{-1}P)$$

é identidade em D_S, pois

$$(\operatorname{Spec} f)(S^{-1}P) = f^{-1}(S^{-1}P) = \{a \in R \mid f(a) \in S^{-1}P\}$$
$$= \{a \in R \mid \tfrac{a}{1} \in S^{-1}P\} \overset{(*)}{=} P.$$

Da mesma forma, a composição:

$$\operatorname{Spec} S^{-1}R \longrightarrow D_S \longrightarrow \operatorname{Spec} S^{-1}R$$
$$Q \longmapsto f^{-1}(Q) \longmapsto S^{-1}(f^{-1}(Q))$$

é identidade em $\operatorname{Spec} S^{-1}R$ pois $Q = S^{-1}(f^{-1}(Q))$ pelo (a)

$\blacksquare$

Corolario Seja R um anel, se $P \in \operatorname{Spec} R$ temos bijeção:

$$\{Q \in \operatorname{Spec} R \mid Q \subseteq P\} \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Spec} R_P$$
$$Q \longmapsto Q \cdot R_P$$

Prova Com $S = R \setminus P$ no teorema anterior

Podemos dar uma prova alternativa [através localização] para caracterização de nil-radical em R.

<u>Proposição</u> [Caracterização de $N(R)$].

$$N(R) = \bigcap_{P \triangleleft R\text{-primo}} P.$$

<u>Prova</u> $N(R) \subset \bigcap_{P \triangleleft R\text{-primo}} P$ como anteriormente.

Mostraremos outra inclusão. Seja $a \in R$ não-nilpotente que vamos provar que existe ideal primo P de R que não contem a. Conjunto $S = (a^n)_{n \geq 0}$ multiplicativo.

$\Rightarrow S^{-1}R \neq 0$ e tem ideal maximal M

$\Longrightarrow$ M corresponde um ideal primo $P \triangleleft R$ que (Teorema anterior) não intercepta S, logo $a \notin P$.

$\square$