Aula 10

Localização

Localização é uma técnica poderosa que (em alguns casos) permite estudar as propriedades de aneis e modulos como é "união" de problemas "menores"!

Motivações:

A. Motivação algebrica Seja R um anel que não é corpo.

Ideia: Fazem "mais" (ou todos ainda) elementos ser invertiveis, introduzindo "frações", na mesma maneira como construimos $\mathbb{Q}$ atravez $\mathbb{Z}$.

B. Motivação geometrica

Seja $R = A(X)$ - funções polinomiais na variedade X. Na mesma maneira como em A faz sentido considerar frações de tais polinomios, ou seja funções racionais:

$$X \to K, \quad x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f, g \in R$$

Claramente, isso não faz sentido para funções globais para todo X, pois g pode ter nulos em alguns lugares, assim a função racional não é bem-definida nestes pontos. Mas podemos pegar subconjuntos de X onde isso posível.

<u>Ex.</u> Seja $a \in X$ um ponto fixo, e

$$S = \{ f \in A(X) \mid f(a) \neq 0 \}$$ - todos funções que não anulam-se em a.

Assim as frações $\frac{f}{g}$, $f \in R$, $g \in S$ podem ser considerados como funções racionais em "a", ou "funções locais" em a.

<u>Lema</u> e <u>Definição</u> [localização].

(a) Um subconjunto $S \subset R$ é chamado <u>multiplicamente</u> <u>fechado</u> se $1 \in S$, e

$$a \in S,\ b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S.$$

(b) Seja $S \subset R$ multiplicamente fechado. Defina

(*) $(a, s) \sim (a', s') \iff$ Existe $u \in S$, com $u(as' - a's) = 0$.

$\sim$ é relação de equivalencia em $R \times S$

Denotaremos por $\frac{a}{s}$ o classe de equivalencia de

$(a,s) \in R \times S$. O conjunto de todas classes de equivalencia

$$S^{-1}R := \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S \right\}$$

é chamado localização de R com respeito S.

$S^{-1}R$ é anel com:

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s} := \frac{as' + a's}{ss'}, \quad e \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}.$$

Prova Relação $\sim$ é obviamente reflexiva e simetrica. Alem disso é transitiva, pois se $(a,s) \sim (a',s')$ e $(a',s') \sim (a'',s'')$, assim existem $u,v \in S$ tais que

$$u(as' - a's) = 0 = v(a's'' - a''s')$$

$(**)$
$$\Rightarrow s'uv(as'' - a''s) = vs''u(as' - a's) + usv(a's'' - a''s') = 0$$

$\Rightarrow (a,s) \sim (a'',s'')$, pois S é mult. fechado e $s'uv \in S$.

Agora é facil ver que soma e produto bem definidos em $S^{-1}R$ (exercicio p/ casa). $\square$

Obs. Comparando com construção de $\mathbb{Q}$ a partir $\mathbb{Z}$. é possivel que relação $(*)$ pode gerar confusão pois use $u \in S$. A razão é que sem u

relação $\sim$ não é transitiva.

Se $u = v = 1$ em Lema acima, assim

$$s'(as'' - a''s) = 0 \quad \text{em} \quad (**)$$

e isso não implique em geral que

$$as'' - a''s = 0, \text{ se } S \text{ tem div. de zero.}$$

—— // ——

Obs.2

a) Existe homomorfismo dos aneis obvio

$$\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$$
$$a \longmapsto \frac{a}{1},$$

Temos que φ é injetivo se S não contem divisores de zero.

b) Na definição de S, não excluimos caso $0 \in S$. Mas neste caso, trivialmente, temos $S^{-1}R = 0$ (pois podemos pegar $u = 0$ em $\sim$).

Exemplos:

1) Se $S = \{1\} \Rightarrow S^{-1}R \simeq R$

2) Suponha que R um domínio e $S = R \setminus \{0\}$. Assim todo elemento não-nulo a/s em $S^{-1}R$ é unidade com inverso $\frac{s}{a}$. Assim $S^{-1}R$ é um corpo chamado corpo de frações de R denotado por Quot R ou Frac R.

3) Seja $a \in R$ e $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Localização $S^{-1}R$ será denotado R_a e chamado <u>localização</u> de R <u>em elemento</u> a.

4) Seja $P \triangleleft R$ um ideal primo. Assim $S = R \setminus P$ é multiplicamente fechado, pois $a \notin P$, $b \notin P \Rightarrow a \cdot b \notin P$.

A localização $S^{-1}R$ será denotada por R_P e chamada <u>localização</u> de R em <u>respeito</u> <u>ideal</u> <u>primo</u> P.

<u>Obs.</u> Localização num ideal primo, é um de mais importantes. No caso particular:

$R = A(X)$, com X uma variedade

e $P = I(a) = \{f \in A(X) \mid f(a) = 0\}$ - é maximal (portanto é primo), Neste caso

R_P - é anel de funções locais como no Parte B. (da Motivação).

Portanto localização de anel das coordenadas num ideal maximal (que corresponde ao ponto) pode ser visto como estudo do X localmente perto do ponto.

Exemplo [Localizações em $\mathbb{Z}$].

1) Localização em $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (como em 2)) tem forma $\operatorname{Quot} \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.

2) — //— //— num primo $p \in \mathbb{Z}$ tem forma

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{a}{p^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$$

3) — //— // num ideal primo $(p) \subset \mathbb{Z}$ tem forma

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\, p \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Obs. Presica ter cuidado com notação, pois $\mathbb{Z}_p$ usualmente denota $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exercicio [p/ casa].
Seja $P \triangleleft R$ ideal primo. Mostre que R_P é um anel local.
[Dica: Considere elementos $\frac{a}{s} \in R_P$ com $a \in P$. Mostre que eles formam ideal maximal e aplique caracterização de aneis ~~primos~~ locais.] //

Ate agora aplicamos localização p/ aneis, mas, de fato, isso funciona bom p/ modulos tmb.

Def. [localização de modulos].

Sejam: $S \subset R$ conjunto mult. fechado em R
M um R-modulo, assim

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \text{existe } u \in S \text{ tal que } u(s'm - sm') = 0$$

é relação de equivalencia em $M \times R$. Conjunto de classes de equivalencia

$$S^{-1}M := \left\{ \frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S \right\}$$

é chamado localização de M. $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$ modulo com

$$\underbrace{\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm + sm'}{ss'}}_{\text{soma}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{a}{s} \cdot \frac{m'}{s'} := \frac{am'}{ss'}}_{\text{ação}}$$

Lema [Localização como o produto tensorial].

Sejam: S — conjunto mult. fechado em R
M — um R-modulo.

Assim: $$S^{-1}M \simeq M \otimes_R S^{-1}R.$$

Prova Existe homomorfismo de R-modulos

$$\varphi : S^{-1}M \longrightarrow M \otimes_R S^{-1}R$$
$$\frac{m}{s} \longmapsto m \otimes \frac{1}{s}, \quad \text{pois}$$

Scanned with CamScanner

para $m' \in M$ e $s' \in S$ com $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ (ou seja, $u(s'm - sm') = 0$) temos

$$m \otimes \frac{1}{s} - m' \otimes \frac{1}{s} = u(s'm - sm') \otimes \frac{1}{uss'} = 0$$

Semelhante, pelo propriedade universal de produtos tensoriais, temos mapa

$$\psi: M \otimes_R S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}M$$
$$m \otimes \frac{a}{s} \longmapsto \frac{am}{s}$$

pois se $a' \in R$, $s' \in S$ com $u(s'a - sa') = 0$ temos $u(s'am - sa'm) = 0 \Rightarrow \frac{am}{s} = \frac{a'm}{s'}$.

Pelo construção φ e ψ mutualmente inversos $\Rightarrow$ φ é isomorfismo. $\boxed{}$

<u>Obs.</u> [Localização de homomorfismos].
Seja $\varphi: M \longrightarrow N$ um homomorfismo de R-modulos. Assim temos homomorfismo de $S^{-1}R$-modulos

$$\varphi \otimes id: \underbrace{M \otimes_R S^{-1}R}_{\simeq S^{-1}M} \longrightarrow \underbrace{N \otimes_R S^{-1}R}_{\simeq S^{-1}N}$$
$$m \otimes \frac{a}{s} \longmapsto \varphi(m) \otimes \frac{a}{s}$$

Aplicanto lema acima temos

$$S^{-1}\varphi: S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N, \quad \frac{m}{s} \longmapsto \frac{\varphi(m)}{s}.$$

Localização é bem-comportado com quase todas conceitos que vimos até agora. Uma das propriedades importantes é que preserva sequencias exatas.

Proposição Para toda sequencia exata de R-modulos:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

e $S \subset R$ conjunto mult. fechado, a sequencia localizada:

$$0 \longrightarrow S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M_3 \longrightarrow 0$$

é exata.

Prova. Aplicando Lema acima $S^{-1}M_i = M_i \otimes_R S^{-1}R$, mas o produto tensorial é exato a direita, assim basta ver que $S^{-1}\varphi$ é injetivo.

Seja $\frac{m}{s} \in S^{-1}M_1$, e $S^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{\varphi(m)}{s} = 0$, ou seja existe $u \in S$ com $u\varphi(m) = \varphi(um) = 0$.

Como φ é injetivo $\Rightarrow$ $um = 0$. Assim

$$\frac{m}{s} = \frac{1}{us} \cdot um = 0 \Rightarrow S^{-1}\varphi \text{ é injetivo} \quad \blacksquare$$

Corolario: Seja R um anel, S conjunto mult. fechado $f: M \longrightarrow N$, homomorfismo de R-modulos.

Assim:

a) f é injetivo (resp, sobrejetivo, bijetivo) $\longrightarrow$ $S^{-1}f$ é injetivo (resp, sobrejetivo, bijetivo)

b) $$\operatorname{Ker}(S^{-1}f) \simeq S^{-1}(\operatorname{Ker} f)$$
$$\operatorname{Coker}(S^{-1}f) \simeq S^{-1}(\operatorname{Coker} f)$$
$$\operatorname{Im}(S^{-1}f) \simeq S^{-1}(\operatorname{Im} f)$$

c) $S^{-1}(M/N) \simeq S^{-1}(M)/S^{-1}(N)$, se $N \subseteq M$.

d) $S^{-1}(M \oplus N) \simeq S^{-1}M \oplus S^{-1}N$

<u>Prova</u> Exercicio p/ casa.