Aula 7

Modulos (continuação)

Nosso objetivo provar Lema de Nakayama. Para isso vamos precisar o seguinte resultado que generaliza o Teorema de Cayley-Hamilton, da algebra linear.

<u>Proposição</u> Seja M um modulo finitamente gerado, I um ideal em R, e $\varphi: M \to M$ um homomorfismo, tal que $\varphi(M) \subset IM$. Assim φ "satisfaz" o polinomio monico, isto é existe o polinomio

$$\chi = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in R[x],$$

com $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$ e

$$\chi(\varphi) = \varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot \mathrm{Id} = 0 \in \mathrm{Hom}_R(M,M)$$

com $\varphi^i = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{i}$

<u>Prova</u> Seja $m_1, \ldots, m_n$ são geradores de M. Temos que $\varphi(m_i) \in IM$ para todos i, portanto existem $a_{i,j} \in I$ com

$$\varphi(m_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, m_j, \quad p/ \quad 1 \leq i \leq n.$$

Scanned with CamScanner

Considerando M como $R[x]$-modulo (através $x \cdot m := \varphi(m)$ para todo $m \in M$), podemos escrever

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} (x \cdot \delta_{i,j} - a_{i,j}) \cdot m_j = 0, \text{ com } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ se } i=j \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Seja B a matriz $(x \cdot \delta_{ij} - a_{ij}\, Id)_{ij}$, assim

$$B = \begin{bmatrix} x - a_{11} Id & -a_{12} \cdot Id & \cdots & -a_{1n} \cdot Id \\ -a_{21} Id & x - a_{22} \cdot Id & \cdots & -a_{2n} \cdot Id \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} Id & -a_{n2} Id & \cdots & x - a_{nn} Id \end{bmatrix}$$

Multiplicando $(*)$ no lado esquerdo pela adjunta de B segue que $B \cdot Adj(B) \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = 0$

Mas $B \cdot Adj(B) = det(B) \cdot I_n$, logo $det(B)$ anula cada m_i, ou seja $det(B)$ é endomorfismo nulo.

Expandindo $det(B)$ obtemos χ requerido ☒

<u>Corolario</u> Seja M um R-modulo f.g., $I \triangleleft R$ um ideal com $IM = M$. Assim existe elemento $a \in I$ t.q. $am = m$ para todo $m \in M$.

<u>Prova</u> Como $IM = M$, aplique a proposição acima para $\varphi = id$. Assim existem $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$, t.q.

$$Id^n + a_{n-1} \cdot Id^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot Id = (1 + a_{n-1} + \ldots + a_0) Id = 0$$

Scanned with CamScanner

Escrevendo $a := -a_{n-1} + \dots + (-a_0)$ temos que $(1-a)m = 0$, ou seja $am = a$ para todos $m \in M$ ☒

$\boxed{\text{Lembrete:}}$ O radical do Jacobson $J(R)$ de um anel R é interseção de todos ideais maximais em R.

Caracterização [dos elementos em $J(R)$].

$a \in J(R) \iff 1 - a \cdot x$ é unidade em R para todo $x \in R$.

Lema [Lema de Nakayama].
Seja M um R-modulo f.g., e $I \triangleleft R$ um ideal contido em $J(R)$. Se $IM = M \Rightarrow M = 0$.

Prova Pelo cololario acima, existe $a \in I$, com $am = m$ para todos $m \in M$, ou seja $(1-a)m = 0$, mas $a \in J(R)$, portanto $1-a \in U(R)$

Logo $M = \left[(1-a)^{-1} \cdot (1-a)\right] \cdot M$
$= (1-a^{-1})\left[(1-a) \cdot M\right] = 0$

☒

Lema de Nakayama tem varios corolarios importantes.

Corolario 1 Seja M um R-modulo f.g. $I \subseteq J(R)$ um ideal e $N \subseteq M$ um submodulo.

Se $M = IM + N \Rightarrow M = N$.

Prova Como M é f.g., assim M/N é f.g. tmb. Com geradores $\{\underbrace{m_1+N}_{=\overline{m_1}}, \dots, \underbrace{m_n+N}_{=\overline{m_n}}\}$, onde $\{m_1, \dots, m_n\}$ são geradores de M. Obvialmente $I \cdot M/N \subseteq M/N$.

Vamos ver a reciproca. Seja $\overline{m} \in M/N$, como $M = IM + N \Rightarrow \overline{m} = \sum a_i m_i + n$, ou seja

$m - \sum a_i m_i - n \in N \Rightarrow m - \sum a_i m_i \in N$.

Assim $\overline{m} = \overline{\sum a_i m_i} = \sum a_i \overline{m_i} \in I \cdot M/N$.

Portanto $I \cdot M/N = M/N$. Aplicando Lema de Nakayama temos que $M/N = 0$, ou seja $M = N$ $\boxtimes$

Scanned with CamScanner

Corolario 2 Seja M um R-modulo f.g. e as imagens de elementos $\{m_1, \dots, m_n\} \subseteq M$ geram $M/_{J(R)\cdot M}$ como R-modulo.
Assim $\{m_1, \dots, m_n\}$ geram M como R-modulo.

Prova Aplicando Corolario 1 para $N = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$

$\boxtimes$

Obs. Se A um anel local, assim $J(A) = \mathcal{M}$ - é unico ideal maximal em A.
Dado um A-modulo X, finitamente gerado, Temos que $X/_{\mathcal{M}\cdot X}$ é um espaço vetorial, pois $A/_{\mathcal{M}}$ é corpo. Assim o Corolario 2 leia-se como

Se $\{x_1 + \mathcal{M}\cdot X, \dots, x_n + \mathcal{M}\cdot X\}$ é uma base em $X/_{\mathcal{M}\cdot X}$ $\Rightarrow$ $\{x_1, \dots, x_n\}$ geram X.

Sequências exatas

Def. Uma sequência de R-modulos e R-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é chamada exata em M_i se $Im(f_i) = ker(f_{i+1})$

A sequência é exata se é exata em cada M_i

Exemplos:

a) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2$ é exata $\Leftrightarrow$ f é injetor

b) $M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ é exata $\Leftrightarrow$ g é sobrejetivo

c) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ é exata $\Leftrightarrow$ f é injetivo, g - sobrejetivo e $Im(f) = ker(g)$.

Sequencia do tipo c) é chamada sequencia exata curta, por exemplo, se $N \subseteq M$ um submodulo

$$\Rightarrow \quad 0 \longrightarrow N \xhookrightarrow{\text{inclusão}} M \xrightarrow[\text{proj. canonica.}]{} M/N \longrightarrow 0$$

é sequência exata curta.

Scanned with CamScanner

d) [Sequencias exatas de ~~modulos~~ homomorfismo].

Seja $\varphi: M \to N$ um homomorfismo, assim temos 2 sequencias exatas:

$$0 \to \ker\varphi \to M \to \operatorname{Im}\varphi \to 0, \quad e$$

$$0 \to \operatorname{Im}\varphi \to N \to N/\operatorname{Im}\varphi \to 0$$

de fato podemos "colar" eles [Ex. p/ casa] p/ receber

$$0 \to \ker\varphi \to M \xrightarrow{\varphi} N \to N/\operatorname{Im}\varphi \to 0.$$

Existem outros metodos pr receber as sequencias exatas novas a partir das dadas.

<u>Lema</u> [Lema de Serpente]. Seja

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"'] & N' \arrow[r, "\psi'"'] & P' &
\end{tikzcd}$$

diagrama comutativa de R-modulos com as linhas exatas. Assim existe sequencia exata longa.

$$\ker\alpha \xrightarrow{\bar{\varphi}} \ker\beta \to \ker\gamma \to \frac{M'}{\operatorname{Im}\alpha} \to \frac{N'}{\operatorname{Im}\beta} \xrightarrow{\bar{\psi}'} \frac{P'}{\operatorname{Im}\gamma}$$

alem disso 1) Se φ injetivo $\Rightarrow$ $\bar{\varphi}$ tmb
2) Se ψ' sobre $\Rightarrow$ $\bar{\psi}'$ tmb.

Scanned with CamScanner

Obs. Temos uma explicação gráfica do Lema de Serpente; como:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, dashed] & \ker\alpha \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & \ker\beta \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & \ker\gamma \arrow[d, hook] \arrow[dddll, dashed, bend left] & \\
0 \arrow[r, dashed] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
 & M'/\mathrm{Im}\,\alpha \arrow[r, dashed] \arrow[d] & N'/\mathrm{Im}\,\beta \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P'/\mathrm{Im}\,\gamma \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

O Lema de fato afirma existência do morfismo "serpente" $\dashrightarrow$

<u>Prova</u> Primeiramente vamos construir os morfismos na sequência

$$\ker\alpha \xrightarrow{\bar{\varphi}} \ker\beta \xrightarrow{\bar{\psi}} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} M'/\mathrm{Im}\,\alpha \xrightarrow{\bar{\varphi}'} N'/\mathrm{Im}\,\beta \xrightarrow{\bar{\psi}'} P'/\mathrm{Im}\,\gamma$$

(a) $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ são restrisões de φ, ψ para os nucleos coresspondentes.

Ex. p/ casa mostrar que $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ são bem definidos.

Scanned with CamScanner

(b) Temos $\varphi'(\mathrm{Im}\,\alpha) \subset \mathrm{Im}\,\beta$, pois

$\varphi'(\alpha(m)) = \beta(\varphi(m))$ pela commutatividade.

Portanto temos a mapa

$$\overline{\varphi'} : \frac{M'}{\mathrm{Im}\,\alpha} \longrightarrow \frac{N'}{\mathrm{Im}\,\beta}$$

$$\overline{m'} \longmapsto \overline{\varphi'(m')}$$

Semelhante temos mapa $\psi' : \dfrac{N'}{\mathrm{Im}\,\beta} \longrightarrow \dfrac{P'}{\mathrm{Im}\,\gamma}$

(c) [Mapa δ]. Existencia dessa mapa é a parte central do lema.

Schematicamente ideia do δ:

pegar inverso do ψ, aplique β, pegar inverso de φ'!

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dll, dashed, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"'] & N' \arrow[r, "\psi'"'] & P' &
\end{tikzcd}$$

Mais precisamente, seja $p \in \ker\gamma \subseteq P$. Como ψ é sobrejetivo, assim existe $n \in N$, com $\psi(n) = p$. Seja $n' = \beta(n)$.
Assim $\psi'(n') = \psi'(\beta(n)) = \gamma\psi(n) = \gamma(p) = 0$, ou seja $n' \in \ker\psi' = \mathrm{Im}\,\varphi'$. Assim existe $m' \in M'$ com $\varphi'(m') = n'$.
Portanto defina $\delta : \ker\gamma \longrightarrow \dfrac{M'}{\mathrm{Im}\,\alpha}$, como

$$p \longmapsto \overline{m'}$$

[Ex p/ casa: Mostre que δ é bem-definido!!].

Scanned with CamScanner

Agora temos sequencia de modulos com morfismos e basta provar que a sequencia é exata. [Ex. p/ casa].

$\square$

Exercicio: [Hom$(-, N)$ é exato a esquerda].

Mostre que se

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \longrightarrow 0 \quad \text{é s.e.c.}$$

Assim

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, N) \xrightarrow{\varphi_2^*} \mathrm{Hom}(M_2, N) \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathrm{Hom}(M_1, N)$$

é exata, com $\varphi_1^* : \mathrm{Hom}(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1, N)$ dado por $f \longmapsto f \circ \varphi_1$, para todo $f \in \mathrm{Hom}(M_2, N)$.

(semelhante p/ φ_2^*). //

Scanned with CamScanner