Aula 5 [Espectro (continuação)].

Lembrete:

a) $\operatorname{Spec} A = \{$ ideais primos em $A\}$

b) $\operatorname{Spec} A$ – um espaço topologico, com a topologia de Zariski: os fechados tem forma $V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid I \subseteq P\}$ com $I \triangleleft A$ um ideal.

Exemplo (da aula pasada). Descrever $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$.
Temos inclusão $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]$, assim isso gera a projeção $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ e a questão é descrever as fibras nessa projeção. Temos que $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \{(p) \mid p\text{-primo}\}$.
O preimagem de (0) consiste de ideal (0) e ideais com polinomios sem termo constante.
Preimagem de (p) consiste de mesmo ideal e ideais com polinomios com termo constante é multiplo de p.

Se em ideal há polinomios multiplos ou dois relativamente primos assim aplicando o Algoritmo de Euclides (a traves $\mathbb{Q}[x]$, mas não vamos entrar em detalhas) podemos excluir o termo constante, contradição. Assim todo primo é ou principal gerado pelo polinomio irredutivel, ou gerado pelo (f, p) com $p \in \mathbb{Z}$ primo e $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomio irredutivel modulo p.

<u>Exemplo 2</u> (da aula pasada).

Seja $A = \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3 - x)$.

Mostraremos que

$$\operatorname{Spec} A = \{(\bar{0})\} \cup \{\langle \bar{x} - a, \bar{y} - b\rangle \mid b^2 = a^3 + a\}$$

Seja $B = \mathbb{C}[x]$, Temos homomorfismo

$$\varphi : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle y^2 - x^3 - x\rangle}$$
$$x \longmapsto \bar{x}$$

Note que $\ker \varphi = \{0\}$, e usando $\bar{y}^2 = \bar{x}^3 + \bar{x}$ temos um conjunto de representantes de classe $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle y^2-x^3-x\rangle} = \mathbb{C}[\bar{x}] + \mathbb{C}[\bar{x}]\cdot\bar{y}$ formado pelos $p(\bar{x}) + q(\bar{x})\bar{y}$ de grau no maximo 1 em y

Como y^2-x^3-x irredutivel em $\mathbb{C}[x,y]$, assim (y^2-x^3-x) é primo em $\mathbb{C}[x,y]$ $\Rightarrow$

$(0) \in \operatorname{Spec} A$ (pois A é dominio).

Considere $\operatorname{Spec}\varphi : \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} B$

Como B é DIP $\Rightarrow$ $\operatorname{Spec} B = \{(0)\} \cup \{(x-a)\}$ pois todos irredutiveis em B tem forma $x-a$, com $a\in\mathbb{C}$. Assim presisamos analiz as fibras de $\operatorname{Spec}\varphi$.

<u>Caso a)</u> Suponha que $\operatorname{Spec}\varphi(\bar{q}) = (0)$, ou seja $\varphi^{-1}(\bar{q}) = (0)$ o que implica que $\bar{q}\cap\mathbb{C}[\bar{x}] = (\bar{0})$. Mostraremos que $\bar{q}=(0)$.

Seja $a(\bar{x}) + b(\bar{x})\cdot\bar{y} \in \bar{q}$, assim

$$(a(\bar{x}) + b(\bar{x})\cdot\bar{y})(a(\bar{x}) - b(\bar{x})\bar{y}) = a(\bar{x})^2 - b(\bar{x})^2\bar{y}^2$$

$$= a(\bar{x})^2 - b(\bar{x})^2(\bar{x}^3-\bar{x}) \in \mathbb{C}[\bar{x}]$$

Como $\bar{q}\cap\mathbb{C}[\bar{x}] = (\bar{0})$, e A um DI $\Rightarrow$ $a(\bar{x})=0$ e $b(\bar{x})=0$, logo $\bar{q}=(0)$.

Caso b) Spec $\varphi(\bar{q}) = (x-a)$ para algum $a \in \mathbb{C}$, ou seja $\varphi^{-1}(\bar{q}) = (x-a)$

$$\Rightarrow \bar{q} \cap \mathbb{C}[\bar{x}] = (\bar{x}-a) \subseteq \bar{q}$$

Vamos calcular $\operatorname{Spec}(A/(\bar{x}-a))$, pois estamos interessados em primos $\bar{q}$ em A que contem $(\bar{x}-a)$. Seja $b \in \mathbb{C}$, com $b^2 = a^3 + a$, temos:

$$\frac{A}{(\bar{x}-a)} \simeq \frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle y^2 - x^3 - x,\ x-a\rangle} \overset{\bar{x} \mapsto a}{\simeq} \frac{\mathbb{C}[\bar{y}]}{(y^2 - a^3 - a)} \simeq \frac{\mathbb{C}[y]}{(y^2 - b^2)}.$$

Se $b \neq 0$, assim pelo Teor. Chines de Resto

$$\frac{\mathbb{C}[y]}{(y^2 - b^2)} \cong \frac{\mathbb{C}[y]}{(y-b)} \times \frac{\mathbb{C}[y]}{(y+b)} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

que possui somente 2 ideais primos:

$(0) \times \mathbb{C}$ e $\mathbb{C} \times (0)$, estes ideais correspondem aos ideais primos $(\bar{y}+b)$ e $(\bar{y}-b)$ de $\frac{A}{(\bar{x}-a)}$ que a sua vez correspondem aos ideais primos $(\bar{y}-b, \bar{x}-a)$ e $(\bar{y}+b, \bar{x}-a)$ de A.

logo $\bar{q} = \langle \bar{y} - b, \bar{x} - a\rangle$ com $b^2 = a^3 - a \neq 0$

Se $b=0$ (ou seja $a^3+a=0 \iff a=0$, ou $a=\pm i$)

então $\dfrac{A}{(\bar{x}-a)} \simeq \dfrac{\mathbb{C}[y]}{(y^2)}$,

logo os ideais primos de $\dfrac{A}{(\bar{x}-a)}$ correspondem aos ideais primos de $\mathbb{C}[y]$ que contem (y^2) neste caso só há um primo (y) que corresponde ao ideal primo $(\bar{y}, \bar{x}-a)$ de A.

<u>Resumindo:</u>

$\operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle y^2-x^3-x\rangle}$ consiste de ideal (0) e ideais $\langle \bar{y}-b, \bar{x}-a\rangle$ que estão em bijeção com os pontos (a,b) da curva $y^2=x^3+x$ em $\mathbb{C}^2$ //.

<u>Espectro maximal</u>

<u>Def.</u> O subespaço de Spec A consistindo dos ideais maximais de A com a topologia induzida é chamado de <u>espectro maximal</u> de A e denot. Specm A.

Obs. Specm A não tem as propriedades

ⓐ funtoriais de Spec A, pois se

$\varphi: A \longrightarrow B$ um homomorfismo

e $M \subset B$ um ideal maximal, assim

$\varphi^{-1}(M)$ não é necessariamente maximal.

ⓑ Como consequencia do Teorema de existência de ideais maximais temos que $A=0 \iff \operatorname{Spec} A = \emptyset$

Dado um ideal I q.q. de A segue do Teorema Corespondência dos Ideais que existe uma bijesão natural

$$\operatorname{Specm}(A/I) = \{ M \in \operatorname{Specm} A \mid M \supseteq I \}.$$

— // —

Observe que existe isomorfismo

$$\alpha: \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle} \longrightarrow A$$

dado por $\overline{x_i} \longmapsto a_i$.

Seja: $I \triangleleft A[x_1, \dots, x_n]$ um ideal

$a_1, \dots, a_n \in A$

Vamos mostrar que:

$$I \subseteq \langle x_1-a_1,\dots,x_n-a_n\rangle \Leftrightarrow f(a_1,\dots,a_n)=0$$

para todo $f(x_1,\dots,x_n)\in I$

De fato, temos

$I \subseteq \langle x_1-a_1,\dots,x_n-a_n\rangle \Leftrightarrow$ para todos $f(x_1,\dots,x_n)\in I$ $\overline{f(x_1,\dots,x_n)}=\overline{0}$ em $\dfrac{A[x_1,\dots,x_n]}{\langle x_1-a_1,\dots,x_n-a_n\rangle}$

$\Leftrightarrow$ para cada $f(x_1,\dots,x_n)\in I$ $\alpha\left(\overline{f(x_1,\dots,x_n)}\right)=0$ em A

$\Leftrightarrow$ para cada $f(x_1,\dots,x_n)\in I$ $f(a_1,\dots,a_n)=0$

Em particular, se $A=k$ um corpo, assim:

$\langle x_1-a_1,\dots,x_n-a_n\rangle \in \operatorname{Specm}(k[x_1,\dots,x_n])$,

e pelo TCI temos que para todo ponto $(a_1,\dots,a_n)$, tal que $f(a_1,\dots,a_n)=0$, para $f\in I$

$$\langle \overline{x_1-a_1},\dots,\overline{x_n-a_n}\rangle \in \operatorname{Specm}\left(\frac{k[x_1,\dots,x_n]}{I}\right).$$

<u>Obs.</u> Mais tarde provaremos (atraves o Teorema Nullstellensatz de Hilbert) que a recíproca em ambos os casos é verdadeira para corpos algebricamente fechados.