Aula 4

Espectro dos aneis comutativos.

Definição O espectro de um anel dado A é: $\operatorname{Spec} A = \{\text{ideais primos em } A\}$ //

Observe, que se $\varphi : A \to B$ um homomorfismo, assim φ induz o morfismo entre espectros

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} \varphi : \operatorname{Spec} B &\longrightarrow \operatorname{Spec} A \\ P &\longmapsto \varphi^{-1}(P) \end{aligned}$$

primo em B primo em A

Lema a) $\operatorname{Spec} A = \emptyset \iff A = 0$

b) Se $I \triangleleft A$ um ideal, e $\pi : A \to A/I$ é homomorfismo canonico, assim o ~~homo~~morfismo induzido

$$\operatorname{Spec} \pi : \operatorname{Spec} A/I \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

é injetor e sua imagem é dada por:

$$V(I) := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid I \subseteq P\},$$

de modo que $\operatorname{Spec}(A/I) = V(I)$ como conjuntos.

Prova a) É obvio.

b) Consequência de Teor. de Corespondência.

Lema 2. Seja A um anel. Assim:

a) $V(0) = Spec(A)$, $V(A) = \emptyset$

b) $V(I) \cup V(J) = V(I \cdot J)$

c) $\bigcap_{i \in \Lambda} V(I_i) = V(\sum_{i \in \Lambda} I_i)$,

se $(I_i)_{i \in \Lambda}$ uma coleção dos ideais em A.

Prova a) é trivial.

b) Seja $P \in V(I) \cup V(J)$, assim $P \in V(I)$ ou $P \in V(J)$

Ou seja $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$, logo $I \cdot J \subseteq P$

e, portanto, $P \in V(I \cdot J)$

Por outro lado, se $P \in V(I \cdot J) \Rightarrow I \cdot J \subseteq P$

Suponha que $I \nsubseteq P$, logo existe $a \in I$, com $a \notin P$

Seja $b \in J$ qualquer elemento em J

$\Rightarrow$ $a \cdot b \in I \cdot J \subseteq P$, como P primo e $a \notin P$, assim

$b \in P$ e $J \subseteq P$, logo $P \in V(J)$, portanto

$P \in V(I) \cup V(J)$.

c) Temos:

$$P \in V\left(\sum_{i\in\Lambda} I_i\right) \iff \sum_{i\in\Lambda} I_i \subseteq P$$

$$\iff I_i \subseteq P, \text{ para todo } i \in \Lambda$$

$$\iff P \in V(I_i), \text{ —"—"— } i \in \Lambda$$

$$\iff P \in \bigcap_{i\in\Lambda} V(I_i).$$

□

<u>Obs.</u> Observe que os conjuntos $V(I)$

a) Cumprem as mesmas propriedades como os conjuntos de "zeros" de um ideal $I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ que a gente viu aula pasada.

b) O Lema acima mostre que os conjuntos $V(I)$'s são "<u>fechados</u>" numa topologia que vamos definir agora (o <u>Topologia de Zariski</u>)

<u>Def.</u> A <u>topologia</u> em Spec A dada através conjuntos $V(I)$, os conjuntos fechados nessa topologia

Scanned with CamScanner

Para entender as propriedades da Topologia de Zariski, defina o conjunto

$$D(a) := \{ \underline{P} \in \operatorname{Spec} A \mid a \notin \underline{P} \},$$

para um elemento $a \in A$.

Teorema [Sobre Topologia de Zariski].

Seja A um anel. Assim:

ⓐ A família de subconjuntos $\{D(a)\}_{a \in A}$ de $\operatorname{Spec} A$ é uma base dos abertos na Top. de Zariski.

ⓑ $D(a \cdot b) = D(a) \cap D(b)$

ⓒ Se $f : A \to B$ um homomorfismo, assim

$\operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ é contínuo

ⓓ Se $\underline{P} \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow \overline{\{\underline{P}\}} = V(\underline{P})$

fecho topológico

Em particular,

a) $M \in \operatorname{Spec} A$ é ponto fechado $\Leftrightarrow$ M é maximal

b) Se A é DI $\Rightarrow$ (0) é ponto denso.

ⓔ $\operatorname{Spec} A$ é compacto.

Prova

(a) $D(a)$ são abertos [Exercicio p/ casa].

Vamos mostrar que todo aberto na topologia de Zariski é união de alguns $D(a)$.

Todo aberto tem forma $\operatorname{Spec}(A) \setminus V(I)$, para algum ideal I de A, ou seja $=$

$$\{ P \triangleleft A \text{ primos que não contem } I \}.$$

Seja $P \in \operatorname{Spec} A \setminus V(I)$, assim existe $a \in I$ tal que $a \notin P$, logo $P \in D(a)$

$$\Rightarrow P \in \bigcup_{a \in I} D(a)$$

Por outro lado se $P \in \bigcup_{a \in I} D(a)$ q.q. ponto, assim existe $a \in I$, tal que $P \in D(a)$, logo $P \in \operatorname{Spec} A$ e $a \notin P$, logo $I \not\subseteq P$, portanto $P \notin V(I)$ ou seja $P \in \operatorname{Spec} A \setminus V(I)$, logo

$$\operatorname{Spec} A \setminus V(I) = \bigcup_{a \in I} D(a).$$

(b) Exercicio p/ casa.

c) Vamos provar que preimagem de um aberto é um aberto. Basta ver isso na base ou seja que:

? $(\mathrm{Spec}\, f)^{-1}(D(a))$ é aberto ?

Temos

$$P \in (\mathrm{Spec}\, f)^{-1}(D(a)) \iff (\mathrm{Spec}\, f)(P) \in D(a)$$
$$\iff f^{-1}(P) \in D(a)$$
$$\iff a \notin f^{-1}(P)$$
$$\iff P \in D(f(a))$$

Logo $(\mathrm{Spec}\, f)^{-1}(D(a)) = D(f(a))$ aberto

$\Rightarrow f$ é contínuo.

d) Temos

$$\overline{\{P\}} = \bigcap_{P \in V(I)} V(I) = \bigcap_{I \subseteq P} V(I) \overset{\text{Lema 2c)}}{=\!=} V\Big(\sum_{I \subseteq P} I\Big)$$

fecho topologico

todos fechados com P

Facil ver que $\sum_{I \subseteq P} I = P$ (Ex. p/ casa).

Assim $\overline{\{P\}} = V(P)$.

a) Seja $M \in \operatorname{Spec} A$ ideal maximal, assim

$$V(M) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \supseteq M\} = \{M\} = \overline{\{M\}}$$

Logo $\overline{\{M\}}$ é fechado. Por outro lado, se $M \in \operatorname{Spec} A$ um ideal proprio, logo está num ideal maximal M', logo

$M' \in V(M) = \overline{\{M\}} = \{M\}$, assim M é maximal.

b) Ex. p/ casa.

c) É suficiente provar que toda cobertura de Spec A por familia dos $\{D(a_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ admite subcobertura finita.

Seja $P \in \operatorname{Spec} A$ q.q., assim existe $\lambda \in \Lambda$ t.q. $P \in D(a_\lambda)$, ou seja $a_\lambda \notin P$.

Considerando o ideal $I = \langle a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$, temos que $I \not\subseteq P$ para todo $P \in \operatorname{Spec} A$.

Logo $I = A$ (pois ~~I~~ não está nenhum maximal)

$\Rightarrow$ $1 = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot a_{\lambda_i}$, mas assim

$A = \langle a_{\lambda_i} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$, ou seja q.q. a_λ é combinação de a_{λ_i}'s, $a_\lambda = \sum_{i=1}^{n} c_i \, a_{\lambda_i}$

Logo se $a_\lambda \notin P$, assim existe $1 \le i \le n$ t.q. $c_i \cdot a_{\lambda_i} \notin P$, portanto

$$P \in D(c_i \cdot a_{\lambda_i}) = D(c_i) \cap D(a_{\lambda_i}),$$

ou seja para todo $P \in \operatorname{Spec} A$ existe $1 \le i \le n$ com $P \in D(a_{\lambda_i}) \Rightarrow$

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{\lambda_i})$$

$\Rightarrow$ Spec A é compacto $\square$

Exemplos:

(a) $0 \in \operatorname{Spec} A \iff A$ é um domínio

(b) Se $A = k$ um corpo $\Rightarrow \operatorname{Spec} k = \{(0)\}$

(c) Se A um DIP, assim

$(a) \neq 0$ é primo $\iff$ a é irredutível.

logo $\operatorname{Spec} A = \{(0)\} \cup \{a \mid a \text{ irredutível em } A\}$

(c1) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \{p \mid p \in \mathbb{Z} \text{ primo}\}$

(c2) $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \{(0)\} \cup \{(x-z) \mid z \in \mathbb{C}\}$

$$\simeq \mathbb{C} \cup \{*\}$$

(c3) $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x] = \{(0)\} \cup \{(x-a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$\cup \{x^2 + px + q \mid p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0\}$

(Ex p/ casa)

d) Seja k um corpo. Assim unicos primos em $k[\![t]\!]$ são (0) e (t)

séries formais

(Ex. p/ casa). Portanto

$$\operatorname{Spec} k[\![t]\!] = \{(0)\} \cup \{(t)\}.$$

Descreva fechados em $\operatorname{Spec} k[\![t]\!]$.

e) (Ex. p/ casa). Mostre que

$$\operatorname{Spec}(A \times B) = \operatorname{Spec} A \sqcup \operatorname{Spec} B$$

união disjunta.

<u>Dica</u>: Mostre que primos em $A \times B$ tem forma $P \times B$ ou $A \times Q$

primo em A   primo em B.