# Lista 6

MAT0460/5737 — 1° SEMESTRE DE 2020

## Extensões Integrais.

**Exercício 1.**
Seja $R \subset R'$ uma extensão de domínios, e $\bar{R}$ é fecho integral de $R$ em $R'$. Mostre que para dois polinomios monicos $f, g \in R'[t]$ com $fg \in \bar{R}[t]$ temos que $f, g \in \bar{R}[t]$.

(*Dica:* Pode supor que todo polinômio $f$ sobre um corpo $K$ tem um corpo de decomposição, assim tem extensão dos corpos $K \subset L$ tal que $f$ fatora-se como o produto dos fatores lineares.)

**Exercício 2.**
Seja $R$ um dominio, e $S \subset R$ um conjunto multiplicamente fechado. Mostre:

(a) Seja $R \subset R'$ uma extensão, e $\bar{R}$ é fecho integral de $R$ em $R'$. Assim $S^{-1}\bar{R}$ é fecho integral de $S^{-1}R$ em $S^{-1}R'$.

(b) Se $R$ é normal, assim $S^{-1}R$ é normal também.

(c) [**Normalidade é propriedade local**] Se $R_P$ é normal para todos ideais maximais $P$ em $R$ assim $R$ é normal.

**Exercício 3.**
Quais extensões $R'$ são integrais sobre $R = \mathbb{C}[x]$?

(a) $R' = \mathbb{C}[x, y, z]/(z^2 - xy)$;

(b) $R' = \mathbb{C}[x, y, z]/(z^2 - xy, y^3 - x^2)$;

(c) $R' = \mathbb{C}[x, y, z]/(z^2 - xy, x^3 - yz)$.

**Exercício 4.**
Seja $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ um polinomio não-nulo sobre corpo arbitrario $K$. Prove que existem $\lambda$ e $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda f(y_1 + y_n^{a_1}, y_2 + y_n^{a_2}, \ldots, y_{n-1} + y_n^{a_{n-1}}, y_n) \in K[y_1, \ldots, y_n]$$

é monico em $y_n$.

**Exercício 5.**
Mostre que:

1) Se $I$ um ideal de $R$, então o quociente $R/I$ é uma $R$-álgebra finita.

2) Se $f : R \to T$ e $g : T \to D$ são álgebras finitas, então $gf : R \to D$ é finita.

3) Se $f : R \to T$ é uma álgebra finita e $g : R \to D$ é uma álgebra qualquer então a álgebra obtida por mudança de base $f \otimes \mathrm{id} : R \otimes_R D \cong D \to T \otimes_R D$ dada por $c \to 1 \otimes c$ é finita. Em particular, se $S \subseteq A$ é um conjunto multiplicativo, a localização $S^{-1}f : S^{-1}R \to S^{-1}T$ é uma álgebra finita.

**Exercício 6.**
Mostre que todo DFU é integralmente fechado.

**Exercício 7.**
Sejam $R \subseteq T \subseteq D$ anéis. Suponha que $R$ é Noetheriano, que $D$ é f.g. como $R$-álgebra e que $D$ é f.g. como um $T$-módulo ou integral sobre $T$. Então $T$ é f.g. como $R$-álgebra.

**Exercício 8.**
Encontre uma Normalização de Noether da $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}[x, y, z]/(z^2 + xy, x^2y - xy^3 + z^4 - 1)$.

**Exercício 9.**
Sejam $R \subseteq T$ anéis tais que $R \setminus T$ é um conjunto multiplicativo, então $R$ é integralmente fechado em $T$.

**Exercício 10.**
Sejam $R \subseteq T$ uma extensão integral, $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de $T$ e $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap R$. Nesse caso $R_\mathfrak{n} \subseteq T_\mathfrak{m}$ é necessariamente integral?

**Exercício 11.**
Seja $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2(x+1))$. Mostre que as localizações $R_\mathfrak{m}$ são integralmente fechadas para todos os ideais maximais $\mathfrak{m}$ de $R$ com exceção de $\mathfrak{m} = (y, x)$.

**Exercício 12.**
Mostre que $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 + x)$ é integralmente fechado.

**Exercício 13.**
Mostre que todas as cadeias maximais de primos de $k[x_1, \dots, x_n]$ tem o mesmo comprimento. Conclua que $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$.

**Exercício 14.**
Sejam $T_1, T_2, \dots, T_n$ $R$-álgebras integrais, mostre que $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$ é uma $R$-álgebra integral.

## Teoria da Dimensão.

**Exercício 15.**
Calcule a dimensão de $k[[t]]$ e de $k[x_1, x_2, \dots]$.

**Exercício 16.**
Seja $R$ um anel e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ então $\dim R \geqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim R/\mathfrak{p}$.

**Exercício 17.**
Seja $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ uma decomposição primaria de um ideal I num anel Noetheriano R. Mostre que

$$\dim R/P = \max\{\dim R/P \mid P \text{ é um primo isolado de I}\}.$$

Qual é interpretação geométrica dessa afirmação.

**Exercício 18.**
Prove que se $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ é irredutível então $\dim k[x_1, \ldots, x_n]/(f) = n - 1$.

**Exercício 19.**
Encontre um anel Noetheriano com dimensão infinita.

**Exercício 20.**
Seja $R = k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ um ideal primo de $k[x_1, \ldots, x_n]$ e $\mathfrak{p}'$ um ideal primo de R. Mostre que $\dim R/\mathfrak{p}' = \dim R - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}')$.

**Exercício 21.**
Calcule dimensão e todos ideais maximais de $\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 - y^2, z^2x - z^2y)$.

**Exercício 22.**
Para cada um dos anéis locais Noetherianos a seguir, determine: um sistema de parâmetros minimal, o polinômio de Hilbert-Samuel e a dimensão de Krull.

1. $k$ um corpo.
2. $\mathbb{Z}_{(p)}$.
3. $\mathbb{C}[x, y]_{(x,y)}$.
4. $R_{\mathfrak{m}}$, onde $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2(x + 1))$ e $\mathfrak{m} = (\overline{x} + 1, \overline{y})$.
5. $R_{\mathfrak{m}}$, onde $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2(x + 1))$ e $\mathfrak{m} = (\overline{x}, \overline{y})$.