Lista 5

MAT0460/5737 — 1° SEMESTRE DE 2020

Condições de cadeia.

Exercício 1.
Seja

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R-módulos. Mostre que M é Artiniano se, e somente se, M' e M'' são Artinianos.

Exercício 2.
Seja M um R módulo de comprimento finito. Mostre que toda cadeia

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

pode ser refinada ao uma série de composição.

Exercício 3.
De exemplo de um modulo Noetheriano mas não Artiniano e um modulo Artiniano mas não Noetheriano. [*Dica:* Considere o $\mathbb{Z}$-modulo $G = \{a/p^n \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0\}$. Mostre que $\mathbb{Z}$ é um submodulo e que $G/\mathbb{Z}$ é Artiniano mas não é Noetheriano.]

Exercício 4.
Calcule o comprimento de $\mathbb{Z}_8$ e $\mathbb{Z}_{12}$ como $\mathbb{Z}$-módulos. Pode generalizar afirmação para calcular o comprimento de R/I como R-modulo, com I um ideal principal num (DIP) R?

Exercício 5.
[Teorema de Jordan-Hölder] Seja M um módulo de comprimento finito. Se $(M_i)_{i=0}^n$ e $(M_i')_{i=0}^n$ são duas séries de composição de M mostre que existe uma permutação σ dos índices $1, \dots, n$ tal que $M_{i+1}/M_i \cong M'_{\sigma(i)+1}/M'_{\sigma(i)}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Exercício 6.
Mostre que se A é Noetheriano então $A[[x]]$ é Noetheriano.

Exercício 7.
Prove que $\mathbb{Z}[i]$, o anel dos inteiros Gaussianos, é um anel Noetheriano.

Exercício 8.
Mostre que R é um anel Artiniano e um domínio se, e somente se, R é um corpo.

Exercício 9.
Seja R um anel Artiniano comutativo. Mostre que todo ideal primo em R é maximal.

Exercício 10.
Seja M um R-módulo Noetheriano. Se todo conjunto não vazio de submódulos f.g. de M tem um elemento maximal, mostre que M é Noetheriano.

Exercício 11.
Mostre que para o caso particular de módulos sobre um corpo k, i.e., k-espaços vetoriais V as seguintes condições são equivalentes:

a) V tem dimensão finita;

b) V tem comprimento finito;

c) V é Noetheriano;

d) V é Artiniano.

Exercício 12.
Um espaço topológico X é dito Noetheriano se os subconjuntos abertos de X satisfazem a cca ou, equivalentemente, se os subconjuntos fechados de X satisfazem a ccd. Mostre que

1) Se R é um anel Noetheriano então $\operatorname{Spec} R$ é um espaço topológico Noetheriano.

2) Se R é um anel qualquer, então $\operatorname{Spec} R$ é um espaço Noetheriano se, e somente se, o conjunto de ideias radicais de A satisfaz a condição da cadeia ascendente.

Exercício 13.
Seja R um anel Noetheriano. Mostre que:

1) Todo ideal $I \subseteq R$ contém um produto finito de ideais primos.

2) R possui apenas um número finito de ideais primos minimais.

Exercício 14.
Seja M um R-módulo Noetheriano (resp. Artiniano) e $f : M \to M$ um homomorfismo de R-módulos sobrejetor (resp. injetor). Mostre que f é um isomorfismo.

Exercício 15.
Seja A um anel tal que:

1) o anel local $A_{\mathfrak{m}}$ é Noetheriano para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(R)$ e;

2) para cada $a \neq 0$ em R, o conjunto de ideais maximais de A que contém a é finito.

Mostre que R é Noetheriano.

Exercício 16.
Prove que se todos os elementos de $\mathrm{Spec}R$ são f.g. então o anel R é Noetheriano.

Exercício 17.
Prove que um domínio Noetheriano R é um (DIP) se, e somente se, todos seus ideais primos são principais.

Exercício 18.
Prove que para todo R-modulo M:

1) Se M é Noetheriano assim $R/\mathrm{ann}(M)$ é Noetheriano também;
2) Se M é finitamente gerado e Artiniano, assim M é também Noetheriano.

Decomposição Primária.

Exercício 19.
Seja R um anel, D o conjunto dos divisores de zero de R. Mostre que:

1. $D = \bigcup_{a \neq 0} \sqrt{(0:a)}$;
2. Use o item anterior para mostrar que, se o ideal zero (0) é decomponível, então:
   a) D é a união de todos os ideais primos associados a (0);
   b) $N(R)$ é a interseção de todos os ideais primos isolados associados a (0);
4. Se I é um ideal de R decomponível então $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i = \{a \in R \mid (I:a) \neq I\}$, onde os $\mathfrak{p}_i$'s são os ideais primos associados a I.

Exercício 20.
Seja R um anel Noetheriano. Mostre que:

1) Todo ideal contém uma potência de seu radical;
2) O nilradical de R é nilpotente.

Exercício 21.
Seja R um anel Noetheriano, $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de R, $\mathfrak{q}$ um ideal qualquer de R. Mostre que são equivalentes:

1. $\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{m}$-primário;
2. $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$;
3. $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ para algum $n > 0$.

Exercício 22.
Seja R um anel Noetheriano e $\mathfrak{m}$ um ideal maximal. Mostre que $A/\mathfrak{m}^n$ é Artiniano para todo $n \geqslant 0$.

Exercício 23.
Mostre que se I é um ideal radical (i.e., $I = \sqrt{I}$) decomponível então I não tem ideais primos embutidos.

Exercício 24.
Seja I um ideal decomponível de um anel R e seja $\mathfrak{p}$ um elemento maximal do conjunto de ideais $(I : a)$ onde $a \in R$ e $a \neq I$. Mostre que $\mathfrak{p}$ é um ideal primo associado a I.

Exercício 25.
Se R é um anel no qual todo ideal tem uma decomposição primária, mostre que toda localização de R, $S^{-1}R$, tem a mesma propriedade.

Exercício 26.
Sejam $\mathfrak{p}_1 = (x, y)$, $\mathfrak{p}_2 = (x, z)$ e $\mathfrak{p}_3 = (x, y, z)$ ideais do anel de polinômios $k[x, y, z]$, onde k é um corpo. Seja $I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$:

1. Mostre que $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3^2$ é uma decomposição primária minimal de I.
2. Encontre os ideais primos minimais do anel $k[x, y, z]/(x, y) \cdot (x, z)$.

Exercício 27.
Seja $I = (xy, x^3 - x^2, x^2y - xy)$ um ideal do anel de polinômios $k[x, y]$, onde k é um corpo.

1. Mostre que $I = (x) \cap (x - 1, y) \cap (x^2, y)$ é uma decomposição primária minimal de I.
2. Encontre os ideais primos minimais do anel $k[x, y]/(xy, x^3 - x^2, x^2y - xy)$.

Exercício 28.
Um espaço topológico X é dito discreto se todo subespaço de X é fechado. Seja R um anel Noetheriano. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

1. R é Artiniano;
2. $\operatorname{Spec} R$ é finito e discreto;
3. $\operatorname{Spec} R$ é discreto.

Exercício 29.
Seja $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$, onde I é um ideal. Mostre que $\dim(R) = 0$ se e somente se R é um k-espaço vetorial de dimensão finita.

Exercício 30.
Seja A uma k-álgebra Noetheriana local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo de resíduos k. Sabendo que $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2020$, qual é o número mínimo de geradores para o ideal $\mathfrak{m}$?

Exercício 31.
Seja R um anel Noetheriano e $\mathfrak{q}$ um ideal $\mathfrak{p}$-primário de R. Considere cadeias de ideais primos de $\mathfrak{q}$ até $\mathfrak{p}$. Mostre que todas tais cadeias tem comprimento finito e que todas as cadeias maximais tem o mesmo comprimento.