Lista 4

MAT0460/5737 — 1° SEMESTRE DE 2020

Exercício 1.
Seja R um anel não-nulo e seja Σ the o conjunto de todos subconjuntos multiplicativamente fechados $S \subset R$ tal que $0 \notin S$. Mostre que Σ tem o elementos máximais e que $S \in \Sigma$ é máximo se e somente se $R \setminus S$ é um ideal primo mínimo de R.

Exercício 2.
Um subconjunto multiplicativamente fechado S de um anel R é chamado *saturado* se

$$xy \in S \iff x \in S,\ y \in S.$$

Prove que:

(1) S saturado se e somente se $R \setminus S$ é uma união de ideais primos.

(2) Se S é qualquer subconjunto multiplicativamente fechado de R, existe um menor subconjunto saturado multiplicativamente fechado $\bar{S}$ contendo S, e que $\bar{S}$ é o complemento em R da união de todos os ideais primos que não cruzam S. ($\bar{S}$ é chamado de *saturação* de S.)

Se $S = 1 + \mathfrak{a}$ para um ideal $\mathfrak{a}$, encontre $\bar{S}$.

Exercício 3.
Seja A um anel, S um conjunto multiplicativo e $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Mostre que:

1) Se f é injetor (respetivamente sobrejetor, bijetor) então $S^{-1}f$ é injetor (respetivamente sobrejetor, bijetor).

2) Localização comuta com kernels, cokernels e imagens, i.e., temos isomorfismos:

   (a) $\mathrm{Ker}(S^{-1}f) \simeq S^{-1}(\mathrm{Ker}(f))$.

   (b) $\mathrm{Coker}(S^{-1}f) \simeq S^{-1}(\mathrm{Coker}(f))$.

   (c) $\mathrm{Im}(S^{-1}f) \simeq S^{-1}(\mathrm{Im}(f))$.

3) Localização comuta com quocientes: Se N é um submódulo de M então

$$S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \simeq \frac{S^{-1}(M)}{S^{-1}(N)}$$

Exercício 4.
Se N e P são submódulos de um R-módulo M, mostre que:

1) $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P$;

2) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$. Mas se $M_i \subseteq M$ para todo $i \in I$ em geral não é verdade que $S^{-1}(\cap_{i \in I} M_i) = \cap_{i \in I} S^{-1}M_i$. Pelo menos uma inclusão vale?

Exercício 5.
Se M e N são R-módulos mostre que existe um isomorfismo de $S^{-1}R$-módulos

$$S^{-1}(M \otimes_R N) \simeq (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}N).$$

Exercício 6.
Seja $f : M \to N$ um homomorfismo, prove que são equivalentes:

1) f é injetiva (sobrejetiva, bijetiva);

2) $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ é injetiva (sobrejetiva, bijetiva) para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$;

3) $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ é injetiva (sobrejetiva, bijetiva) para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}R$;

Exercício 7.
Para qualquer R-módulo M, mostre que são equivalentes:

1) M é um R-módulo plano;

2) $M_{\mathfrak{p}}$: é um $R_{\mathfrak{p}}$-módulo plano para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$;

3) $M_{\mathfrak{m}}$: é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo plano para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}R$;

Exercício 8.
Seja I um ideal de R, mostre que $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$. Em particular, se $N(R)$ é o nilradical de R então $N_{S^{-1}R} = S^{-1}N(R)$.

Exercício 9.
Seja M um R-módulo e I um ideal de R. Suponha que $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}R$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$. Prove que $M = IM$.

Exercício 10.
Seja R um anel. Suponha que, para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$, o anel local $R_{\mathfrak{p}}$ não tenha elementos nilpotentes não nulos. Mostre que R não tem elementos nilpotentes não nulos. Se cada $R_{\mathfrak{p}}$ for um domínio de integridade, então necessariamente R é um domínio de integridade?

Exercício 11.
Seja R um anel e seja F o R-módulo livre R^n. Mostre que todo conjunto de n geradores de F é uma base de F (i.e. é LI sobre R).