Lista 3

MAT0460/5737 — 1° SEMESTRE DE 2020

Exercício 1.
Mostre que se $N \subset M \subset L$ são R-modulos, então
$$(L/N)/(M/N) \cong L/N.$$

Exercício 2.
Mostre que se M_1, M_2 são submodulos de M assim
$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}.$$

Exercício 3.
Seja $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ uma cadeia de submódulos de M. Mostre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ é um submódulo em M.

Exercício 4.
Se N é um submodulo de M, o *aniquilador* de N em R é definido como
$$\{a \in R \mid an = 0 \text{ para todos } n \in N\}.$$
Mostre que o aniquilador de N em R é um ideal.

Exercício 5.
Se I é um ideal de R, o *aniquilador* de I em M é definido como
$$\{m \in M \mid im = 0 \text{ para todos } i \in I\}.$$
Mostre que o aniquilador de I em M é um submódulo.

Exercício 6.
Descreva todos $\mathbb{Z}$-modulo homomorfismos de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ao $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Exercício 7.
Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n, m)\mathbb{Z}$.

Exercício 8.
Mostre que $\mathrm{Hom}_R(R, R)$ e R são isomorfos como anéis.

Exercício 9.
Seja I ideal à esquerda de R e n um inteiro positivo. Mostre que
$$R^n/IR^n \cong R/IR \times \cdots \times R/IR \quad \text{(n vezes)}.$$

Exercício 10.
Seja

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$$

uma sequência de R-modulos e R-homomorfismos. Mostre que essa sequencia é exata se, e somente se, para todo R-modulo N a sequencia

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{f_1^*} \mathrm{Hom}_R(N, M_2) \xrightarrow{f_2^*} \mathrm{Hom}_R(N, M_3)$$

é exata.

Exercício 11.
Seja $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ uma sequencia exata de R-modulos. Mostre que se M' e M'' são finitamente gerados, assim M é finitamente gerado.

Exercício 12.
Sejam I, J são ideais num anel comutativo R.

a) Mosre que existe sequencia exata curta (de R-modulos):
$0 \longrightarrow I \cap J \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow I + J \longrightarrow 0$

b) Usando item a) mostre que existe sequencia exata curta
$0 \longrightarrow R/(I \cap J) \longrightarrow R/I \oplus R/J \longrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0$

C) Encontre os exemplos quando sequencias a) e b) não cinde.

Exercício 13.
Mostre que um R-module M é finitamente gerado se e somente se existe sequencia exata

$R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 14.
Seja dada sequencia exata curta (de R-modulos).

$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$

Mostre que os seguintes condições são equivalentes:

a) Existe homomorfismo $\beta : M_3 \to M_2$ tal que $g \circ \beta = id_{M_3}$.

b) Existe homomorfismo $\alpha : M_3 \to M_2$ tal que $\alpha \circ f = id_{M_1}$.

Exercício 15.
No diagrama abaixo a linha e a coluna são exatas. Mostre que se $t \circ f : M_1 \to L_2$ é isomorfismo, então $g \circ h : M_2 \to L_1$ é isomorpfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & M_2 \arrow[d, "h"] & & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & L_1 \arrow[r] & 0 \\
 & & L_2 \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Exercício 16.
[Lema dos cinco] Considere a seguinte diagrama comutativa de homomorsmos de R-modulos a direita com as linhas exatas.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

a) Se h_2 e h_4 são sobrejetores e h_5 injetora, mostre que h_3 é sobrejetora.

b) Se h_2 e h_4 são injetores e h_1 é sobrejetor, mostre que h_3 é injetor.

c) Se h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos, mostre que h_3 e um isomorfismo.

Exercício 17.
Seja R um anel não nulo. Mostre que se $R^n \cong R^m$ (como R-módulos) assim $n = m$. [*Dica:* Aplica o Exer. 9 com I ideal maximal de R].

Exercício 18.
Se I é um ideal próprio de um domínio A, assim A/I é plano se e somente se $I = 0$.

Exercício 19.
Sejam M, N e P os R-modulos. Mostre que

1. $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$.

2. $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$.

3. $(M \oplus N) \otimes_R P \cong (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$.

Exercício 20.
Sejam R um anel local, k seu corpo de resíduos (istou é o quociente do R pelo ideal seu único ideal maximal), M, N R-modulos finitamente gerados. Mostre que:

1. Se $M \otimes_R k = 0$ assim $M = 0$.
2. Se $M \otimes_R N = 0$ assim $M = 0$ ou $N = 0$.
3. Seja $\varphi : N \to M$ um morphismo de R-algebras. Assim φ é sobrejetor se, e somente se, a aplicação k-linear
$$\varphi \otimes \mathrm{id} : N \otimes_R k \to M \otimes_R k$$
é sobrejetora.

Dica: Aplique o Lema de Nakayama.

Exercício 21.
Calcule os seguintes produtos tensorias:

1) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$;
2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
3) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$;
4) $\mathbb{Q}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$;
5) $\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathbb{Z}/pq} \mathbb{Z}/q$, com p, q primos distinos em $\mathbb{Z}$.
6) $\mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
7) $\mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
8) $\mathbb{Q}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$;
9) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Exercício 22.
Para espaços vetoriais da dimensão finita V, W sobre o corpo k, mostre que existe isomorfismo natural:
$$(V \otimes_k W)^* \cong V^* \otimes_k W^*$$
onde $X^* = \mathrm{Hom}_k(X, k)$ para espaço vetorial X sobre k.

Exercício 23.
Para um espaço vetorial da dimensão finita V sobre o corpo k, mostre que existe isomorfismo natural:

$$V \otimes_k V^* \cong \mathrm{End}_k(V).$$

Exercício 24.
Sejam I e J dois ideais em (DIP) R. Determine

$$R/I \otimes_R R/J.$$

Exercício 25.
Seja R-um anel, $f : R \to B$ uma R-algebra, M um R-modulo e R um B-modulo. Mostre que:

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_R M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N).$$

Exercício 26.
[Cancelamento]. Seja $f : R \to B$ uma R-algebra, M um R-modulo e R um B-modulo. Mostre que:

$$(M \otimes_R B) \otimes_B N \cong (M \otimes_R N).$$

Exercício 27.
Seja B uma R-álgebra e $f(x) \in R[x]$. Mostre que existe isomorfismos de B-álgebras:

1. $R[x] \otimes_R B \cong B[x]$.
2. $\dfrac{R[x]}{(f(x)R[x])} \otimes_R B \cong \dfrac{B[x]}{(f(x)B[x])}$.