Lista 2

MAT0460/5737 — 1° SEMESTRE DE 2020

Exercício 1.
Sejam I, J, K os ideais de R. Mostre que

(a) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;

(b) $\sqrt{I^n} = I$, se I um ideal primo;

(c) $\sqrt{I + J \cdot K} = \sqrt{I + J \cap K} = \sqrt{I + J} \cap \sqrt{I + K}$.

Exercício 2.
Sejam I, I_i, J, J_i, K os ideais de R. Mostre que

(a) $((I : J) : K) = (I : J \cdot K) = ((I : K) : J)$;

(b) $(\bigcap_i I_i : J) = \bigcap_i (I_i : J)$;

(c) $(I : \sum_i J_i) = \bigcap_i (I : J_i)$.

Exercício 3.
Mostre que os seguintes conjuntos X de $\mathbb{A}^n_K$ não são variedades sobre K

(a) $X = \mathbb{Z} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$;

(b) $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$;

(c) $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : x_2 = \operatorname{sen}(x_1)\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$;

(d) $X = \{x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} : |x| = 1\} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$;

Exercício 4.
Mostre que a seguinte equação entre ideais vale em $\mathbb{C}[x, y]$.

$$(x^3 - x^2, x^2y - x^2, xy - y, y^2 - y) = (x^2, y) \cap (x - 1, y - 1)$$

Explique se este ideal é radical? Descreva a variedade correspondente em $A^2_{\mathbb{C}}$.

Exercício 5.
Seja $R = \prod_i R_i$ o produto direto dos aneis R_i. Mostre que o $\operatorname{Spec}(R)$ é união disjunta dos subconjuntos abertos (e fechados) X_i, com X_i homeomorfo ao $\operatorname{Spec}(R_i)$.

Exercício 6.
Mostre que todo anel R possui um ideal primo minimal, ou seja, um ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que se $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(R)$ e $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Quais são os primos minimais de $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^2)$.

Exercício 7.
Seja R um anel. Para um subconjunto $S \subset A$, defina

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supseteq S\}$$

como conjunto de todos ideais primos de R que contêm S. Mostre que

$$V(S) = V(I) = V(\sqrt{I}),$$

com $I = \langle S \rangle$.

Exercício 8.
Seja k um corpo. Mostre que os conjuntos algébricos formam a família dos conjuntos fechados em topologia de $\mathbb{A}_k^n$ (chamada *Topologia de Zariski*), ou seja que eles satisfazem:

1) $Z(0) = \mathbb{A}_k^n$ e $Z(k[x_1, \dots, x_n]) = \emptyset$,
2) $Z(I) \cup Z(J) = Z(I \cdot J)$,
2) $\bigcap_{i \in I} Z(I_i) = Z(\sum_{i \in I} I_i)$.

Exercício 9.
Um espaço topologico X é dito irredutivel se $X \neq$ e se todo par de conjuntos abertos não vazios em X tem interseção não vazio, ou equivalente, todo aberto não vazio é denso em X. Mostre que $\text{Spec}(R)$ é irredutível se e só se o nilradical de R é um ideal primo.

Exercício 10.
Descreva o $\text{Spec}(R)$ em caso R é um (DIP).

Exercício 11.
Para cada um dos aneis R deternime o $U(A)$, $\text{Spec}(R)$. Descreva os abertos e fechados em $\text{Spec}(R)$.

1) $\mathbb{Z}$
2) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
3) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
4) $\mathbb{C}[x]$
5) $\mathbb{C}[x]/\langle x^{11} \rangle$
6) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$
7) $\mathbb{C}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$
8) $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$

9) $\mathbb{C}[x, y]/\langle x^2 + y^2 + 1\rangle$

9) $\mathbb{R}[x, y]/\langle x^2 + y^2 + 1\rangle$

Exercício 12.
Seja $t \in \mathbb{C}$ um numero fixo. Descreva $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, t]/\langle x(x - t)\rangle)$. Descreva como ele varia se vario o parâmetro t. O que acontece quando t aproxima 0?

Exercício 13.
Seja $R = \mathbb{C}[x]/x^2$. Descreva $\mathrm{Specm} R$.