Lista 1

MAT0460/5737 — 1° SEMESTRE DE 2020

Exercício 1.
Mostre que se $f : A \to B$ é um homomorfismo de anéis e J um ideal de B, então a pré-imagem $f^{-1}(J)$ é um ideal de A.

Exercício 2.
Seja R um anel, mostre que $R[x_1, \dots, x_n]/\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle \cong R$.

Exercício 3.
Seja k um corpo e seja $f(x) \in k[x]$ um polinômio não nulo com fatoração

$$f(x) = a \cdot p_1(x)^{e_1} \cdot \dots \cdot p_r(x)^{e_r},$$

em potências de polinômios mônicos irredutíveis distintos $p_i(x)$.

(1) Mostre que:
$$k[x]/\langle f(x)\rangle \cong k[x]/\langle p_1(x)^{e_1}\rangle \times \dots \times k[x]/\langle p_r(x)^{e_r}\rangle$$

(2) Conclua que
$$\mathbb{F}_q[x]/\langle x^q - x\rangle \cong \mathbb{F}_q \times \dots \times \mathbb{F}_q$$

Exercício 4.
Seja R um anel tal que todo $x \in R$ satisfaz $x^n = x$ para algum $n > 1$ (dependendo do x). Mostre que todo ideal primo em R é maximal.

Exercício 5.
Seja R um anel não nulo. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) R é um corpo;

b) os únicos ideais de R são 0 e R;

c) todo homomorfismo de R num anel não nulo B é injetivo.

Exercício 6.
Seja R um anel não-nulo. Mostre que o conjunto dos ideais primos em R possui elemento minimal (ao respeito da inclução).

Exercício 7.
Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo e sejam I_i ideais quaisquer de um anel R. Mostre que

$$\mathfrak{p} \supseteq I_1 \cdot I_2 \ldots I_n \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supseteq I_i$$

para algum i.

Exercício 8.
Seja R um anel das funções de um conjunto não vazio X a um corpo F. Mostre que R não contém elementos nilpotentes não-nulos.

Exercício 9.
Seja x um elemento nilpotente do anel comutativo R.

(a) Mostre que x é ou zero ou divisor de zero.

(b) Mostre que rx é nilpotente para todo $r \in R$.

(c) Mostre que $x + 1$ é uma unidade em R.

(d) Mostre que a soma de um elemento nilpotente e uma unidade é uma unidade.

Exercício 10.
Seja R um anel. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(1) R tem exatamente um ideal primo;

(2) todo elemento em R é unidade ou nilpotente;

(3) $R/N(R)$ é um corpo.

Exercício 11.
Seja k um corpo e $n > 0$ um inteiro. Descreva todos ideais em $k[x]/(x^n)$.

Exercício 12.
Um anel R se chama *Booleano* se $a^2 = a$ para todo $a \in R$. Mostre:

(1) R é comutativo;

(2) $2x = 0$ para todo $x \in R$;

(3) todo ideal primo $\mathfrak{p}$ é maximal, e $R/\mathfrak{p}$ é um corpo com 2 elementos;

(4) todo ideal finitamente gerado em R é principal.

Exercício 13.
Suponha que R um anel local. Mostre que unicos idempotentes em R são 0 ou 1.

Exercício 14.
Mostre que os anéis $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$ não são isomorfos.

Exercício 15.
Seja R um anel comutativo, e $f = f_0 + f_1x + \dots f_n x^n \in R[x]$. Mostre

(a) Mostre que $f \in R[x]$ é unidade se e somente se f_0 é unidade em R e todos f_i são nilpotentes para $i > 0$;

(b) f é nilpotente se e somente se todos f_i são nilpotentes;

(c) f é um divisor de zero se e somente se existe $a \in R$ não-nulo tal que $af = 0$.

Exercício 16.
Seja $R[[x]]$ o conjunto das séries de potências formais em x, i.e., o conjunto de todas as somas da forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

Definimos a soma na maneira óbvia e multiplicação por

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \times \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}) x^i.$$

(a) Mostre que $R[[x]]$ é anel comutativo com 1;

(b) Mostre que $1 - x$ é unidade em $R[[x]]$ com inverso $1 + x + x^2 + \dots$;

(c) Mostre que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ é unidade se, e somente se, a_0 é unidade em R.

(d) Mostre que $R[[x]]$ é um domínio de integridade se R é um domínio de integridade.

(e) Mostre que $f \in J(R[[x]])$ se e somente se $f_0 \in J(R)$.

Exercício 17.
Sejam I, J, K ideais de R.

(a) Mostre que $I(J + K) = IJ + IK$ e $(I + J)K = IK + JK$;

(b) Mostre que, se $J \subseteq I$, então $I \cap (J + K) = J + (I \cap K)$.

Exercício 18.
Mostre que, se a é um elemento nilpotente de R, então $1 - ab$ é unidade para todo $b \in R$.

Exercício 19.
Seja $R = C[0,1]$ – anel dos funçoes continuas reais, e $M_c = \{f \in C[0,1] \mid f(c) = 0\}$ para $c \in [0,1]$.

(a) Mostre que se, M é um ideal maximal de R, então existe $c \in [0,1]$ tal que $M_c = M$;

(b) Mostre que, se $b \neq c$ em $[0,1]$, então $M_b \neq M_c$;

(c) Mostre que M_c não é finitamente gerado.