

Lista 5

Inteiros Módulo m

1. Construa as tabelas de adição e de multiplicação de \mathbb{Z}_7 e \mathbb{Z}_{12} .
2. Busque os inversos dos seguintes elementos
 - a) $\overline{14}$ em \mathbb{Z}_{15} ;
 - b) $\overline{38}$ em \mathbb{Z}_{83} ;
 - c) $\overline{351}$ em \mathbb{Z}_{6669} ;
 - d) $\overline{91}$ em \mathbb{Z}_{2565} .
3. Mostre
 - a) $\overline{73} = \overline{-92}$ em \mathbb{Z}_5 ;
 - b) $\overline{99} = \overline{-87}$ em \mathbb{Z}_6 ;
 - c) $\overline{3!} = \overline{-2!}$ em \mathbb{Z}_8 ;
 - d) $\overline{12!} = \overline{15!}$ em \mathbb{Z}_9 .
4. Em \mathbb{Z}_{20} , determine
 - a) os menores representantes positivos de $\overline{-10}$ e $\overline{-6}$;
 - b) todos os divisores de zero;
 - c) todos os elementos inversos com seus inversos;
 - d) repita os itens b) e c) para \mathbb{Z}_{10} e \mathbb{Z}_{12} .
5. Determine os inversos multiplicativos de \bar{a} em \mathbb{Z}_n e, em seguida, resolva as equações de congruências reduzidas:
 - a) $a = 3, \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{10}$ e $3x \equiv 7 \pmod{10}$;
 - b) $a = 6, \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{35}$ e $6x - 2 \equiv 11 \pmod{35}$.
6. Sejam $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ com $\text{mdc}(c, m) = 1$. Prove que $\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c}$ implica que $\bar{a} = \bar{b}$.
7. Sejam p um primo e $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$. Prove que
 - a) $\bar{a}^p = \bar{a}$;
 - b) $(\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a} + \bar{b}$.
8. O elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se **idempotente** se $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}$.
 - a) Busque todos idempotentes em \mathbb{Z}_6 e \mathbb{Z}_{12} .
 - b) Busque todos idempotentes em \mathbb{Z}_{10} e \mathbb{Z}_{30} .
 - c) Seja p um primo. Mostre que $\bar{0}, \bar{1}$ são os únicos idempotentes em \mathbb{Z}_p .
9. O elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se **nilpotente** se $\bar{a}^k = \bar{0}$ para algum k . Mostre que \mathbb{Z}_m não tem não-nulos nilpotentes se e só se m não tem fator primo em quadrado.
10. Em \mathbb{Z}_7 , busque os quadrados de todos elementos.

11. Busque as raízes em \mathbb{Z}_7 de $x^2 + x + \bar{1}$ por completar quadrados e usando Exercício 10.
12. Busque as raízes em \mathbb{Z}_7 de $\bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$ por completar quadrados e usando Exercício 10.
13. Em \mathbb{Z}_{11} , busque os quadrados de todos elementos.
14. Busque os raízes em \mathbb{Z}_{11} de $\bar{4}x^2 + \bar{6}x + \bar{1}$ por completar quadrados e usando Exercício 13.
15. Busque os raízes em \mathbb{Z}_{11} de $\bar{4}x^2 + \bar{6}x + \bar{8}$ por completar quadrados e usando Exercício 13.
16. Busque os divisores de zero, em \mathbb{Z}_m , e resolva as equações abaixo
- $\bar{7}x = \bar{0}, m = 21;$
 - $\bar{4}x = \bar{10}, m = 22;$
 - $\bar{3}x = \bar{6}, m = 24;$
 - $\bar{5}x = \bar{0}, m = 25;$
17. Busque os divisores de zero, em \mathbb{Z}_m , para $m = 8, 9, 10, 14, 15, 26, 28$.
18. Ache os divisores de zero e os elementos que tem inversos em $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{17}, \mathbb{Z}_{21}$ e \mathbb{Z}_{89} .
19. Resolva, em \mathbb{Z}_m , as equações abaixo:
- $\bar{3}x + \bar{2} = \bar{6}x + \bar{7}, m = 8;$
 - $(\bar{2}x + \bar{3})^2 + (\bar{3}x + \bar{2})^2 + \bar{5}x = \bar{0}, m = 5;$
 - $\bar{4}x - \bar{7} + \bar{6}x + \bar{2} = \bar{3}x + \bar{5}x, m = 12;$
 - $x^{21} - x = \bar{0}, m = 5;$
 - $x^{12} - \bar{1} = \bar{0}, m = 5;$
 - $x^7 - x = \bar{0}, m = 4.$
 - $x^3 - \bar{2}x^2 - \bar{3}x = \bar{0}, m = 12.$
20. Resolva em \mathbb{Z}_5 o sistema abaixo:
- $$\begin{cases} \bar{4}x + y = \bar{1} \\ x - \bar{2}y = \bar{4}. \end{cases}$$
21. Resolva em \mathbb{Z}_4 o sistema abaixo:
- $$\begin{cases} x + y + z = \bar{0} \\ \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{3}z = \bar{3} \\ x + y + \bar{3}z = \bar{0}. \end{cases}$$
22. Verifique se os elementos abaixo são inversíveis. Em caso afirmativo, determine o inverso.
- $\bar{97}$ em $\mathbb{Z}_{307};$
 - $\bar{22}$ em $\mathbb{Z}_{105}.$