Lista 2

Divisibilidade.

1. Mostre que um inteiro a é par se e somente se a^2 for par.
2. Mostre que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6 e que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24.
3. Mostre que $4 \nmid n^2 + 2$ para qualquer inteiro a.
4. Prove que se $a \in \mathbb{Z}$ assim $360 \mid a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$.
5. Seja a um inteiro. Mostre que
   a) $a^2 - a$ é divisível por 2;
   b) $a^3 - a$ é divisível por 6;
   c) $a^5 - a$ é divisível por 30;
6. Mostre que todo inteiro do forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$, mas o contrario é falso.
7. Usando Algorithmo de Divição mostre que
   a) todo inteiro impar é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$;
   b) o quadrado de todo inteiro é do forma ou $3k$ ou $3k + 1$;
   c) o cubo de todo inteiro é do forma $9k$ ou $9k + 1$ ou $9k + 8$.
8. Para $n \geq 1$ mostre que $n(n+1)(2n+1)/6$ é um inteiro. (*Dica:* Usando Algoritmo de Divição, n tem forma $6k$ ou $6k + 1$ ou... ou $6k + 5$. Mostre o resulto em todos os casos).
9. Verefique que se um inteiro n é o quadrado e o cubo simultamente (como em caso $64 = 8^2 = 4^3$), assim n é da forma $7k$ ou $7k + 1$.
10. Seja n um inteiro positivo. Prove por indução que
    a) $7 \mid 2^{3n} - 1$ e $8 \mid 3^{2n} + 7$.
    b) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$.
11. Sejam x, y os inteiros impares. Mostre que $x^2 + y^2$ é par mas não divisivel por 4.
12. Busca todos n tais que $n^2 + 1$ é divisivel por $n + 1$.
13. Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ assim $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

Maximo divisor comum e minimo multiplo comum.

1. Para a não nulo mostre (usando somente definição de mdc) que $\mathrm{mdc}(a, 0) = \mathrm{mdc}(a, a) = |a|$ e $\mathrm{mdc}(a, 1) = 1$.

2. Mostre usando somente definição de mdc que $\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(|a|, |b|)$.

3. Sejam a, b dois inteiros não-nulos. Mostre que $\mathrm{mdc}(na, nb) = n\mathrm{mdc}(a, b)$ e $\mathrm{mmc}(na, nb) = n\mathrm{mmc}(a, b)$ se n é um inteiro positivo.

4. Determine $\mathrm{mdc}(a, b)$ e $\mathrm{mmc}(a, b)$, para os inteiros a e b dados abaixo:

   a) $a = 32$ e $b = 54$;
   b) $a = 27$ e $b = 45$;
   c) $a = 15$ e $b = 80$;
   d) $a = 8798$ e $b = 2314$;
   d) $a = 1583890$ e $b = 3927$.

5. Utilize o algoritmo de Euclides para determinar inteiros r e s tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = ar + bs$.

   a) $a = 56$ e $b = 72$;
   b) $a = 24$ e $b = 138$.
   c) $a = 119$ e $b = 272$.
   d) $a = 1128$ e $b = 336$.

6. Para os inteiros não-nulos a e b, mostre que os seguintes condições são equivalentes

   a) $a \mid b$;
   b) $\mathrm{mdc}(a, b) = |a|$;
   c) $\mathrm{mmc}(a, b) = |b|$.

7. Mercúrio leva 2111 horas para completar uma volta em torno do Sol, enquanto Vênus leva 5393 horas. Com que frequência Sol, Mercúrio e Vênus se alinham?

8. Mostre que se a é um inteiro positive assim a, $a + 1$ são primos entre si.

9. Sejam a, b primos entre si não nulos, procure $\mathrm{mdc}(a^2 + b^2, a + b)$.

10. Assumido que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, mostre o seguinte:

    a) $\mathrm{mdc}(a + b, a - b) = 1$ ou 2. (*Dica:* Seja $d = \mathrm{mdc}(a + b, a - b)$ e mostre que $d \mid 2a$, $d \mid 2b$; assim, $d \leq \mathrm{mdc}(2a, 2b) = 2\mathrm{mdc}(a, b)$);
    b) $\mathrm{mdc}(2a + b, a + 2b) = 1$ ou 3;
    c) $\mathrm{mdc}(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2. (*Dica:* $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$.)

11. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a \mid b$ e $\mathrm{mdc}(b, c) = 1$. Mostre que $\mathrm{mdc}(a, c) = 1$.

12. Explique como definir o maximo divisor comum $\mathrm{mdc}(a, b, c)$ de três números inteiros a, b, c. Em seguida, generalize sua definição para aplicar a qualquer número dos inteiros.