Lista 1

Axiomática de $\mathbb{Z}$.

1. Dado um inteiro a, chamamos de *valor absoluto* de a o numero inteiro designado por $|a|$ e definido por
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$
Sejam a e b. Provar que
   a) $|a| \geq 0$;
   b) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;
   c) $-|a| \leq a \leq |a|$;
   d) $|ab| = |a||b|$;
   e) $|a+b| \leq |a| + |b|$;
   f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
2. Prove que o conjunto $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\}$ é vazio.
3. Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ é dito *inversível* se existir em elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostrar que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.

Indução Finita.

4. Prove que se vale o Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.
5. Prove que se vale o Princípio da Indução Finita (2-da forma), então vale o Princípio da Boa Ordem.
6. Prove por indução que
   a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}, \quad \forall n \geq 1$;
   b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \forall n \geq 1$;
   c) $(1+h)^n \geq 1 + nh$ onde $h > 0$ está fixado e $n \geq 0$.
7. Prove por indução que
   (a) $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3;
   (b) $5^n - 4n + 15$ é sempre divisível por 16 para todo $n \geq 0$.
   (c) $2n^3 + 3n^2 + 7n$ é sempre divisível por 6 para todo $n \geq 0$.
   (d) $4^{2n-1} + 1$ sempre divisível por 5 para todo $n \geq 0$.
   (r) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ sempre divisível por 11 para todo $n \geq 0$.

8. Sejam a e r dois números inteiros $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, \ldots, a_n = a + (n-1)r, \ldots$ é dita uma progressão aritmética de razão r. Prove, utilizando o princípio de indução finita, que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$a + (a + r) + \cdots + (a + (n-1)r) = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}.$$

9. Considere a seguinte sequència de somas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} &= \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} &= \frac{23}{24} \\ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} &= \frac{119}{120} \\ &\cdots \end{aligned}$$

e seja $P(n)$ a soma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}.$$

Determine uma expressão para $P(n)$ e, em seguida, utilizando o Princípio da Indução Finita, prove a sua validade para $n \geq 2$.

10. Prove que se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n-lados é

$$(n-2)180^0.$$

11. Sabe-se que a forma trigonométrica do número complexo $z = a + bi$ é dada por

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

onde $\theta = \arg z$, $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Prove, utilizando o Princípio de Indução Finita, a fórmula de De Moivre, isto é, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ então

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

12. Seja $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos potencia não negativa de a do seguinte modo:

$$a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^m = a^{m-1} \cdot a, \quad \text{se } m > 1;$$

Prove que

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N};$
b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$

13. Prove que $x - y$ divide $x^n - y^n$, para quaisquer inteiros x, y distintos e todo $n \geq 1$.

14. Para todo inteiro $n \geq 1$, prove que

a) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x};$
b) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ (*Dica:* use o item anterior).

15. Seja n um inteiro positivo. Mostre que

$$\text{a)} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0; \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

16. Prove por indução finita que

(a)
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \qquad (n > 1).$$

(b)
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$$

(c)
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

(d)
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

(e)
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

para todo inteiro positivo n.

17. (a) Sejam
$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},$$
para todo $n > 1$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$. Mostre que
$$a_n = 2^n + 1,$$
para todo $n \geq 0$.

(b) Sejam
$$b_{n+1} = 3b_n - 2b_{n-1},$$
para todo $n > 1$ com $b_0 = 0$ e $b_1 = 1$. Mostre que
$$b_n = 2^n - 1,$$
para todo $n \geq 0$.

(c) Sejam
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$
para todo $n > 1$ com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Mostre que
$$1) \qquad F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1},$$
$$2) \qquad F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n,$$
para todo n.