

Aula 24.04.2020

①

Revisão 2

3. MDC e MMC

? O que precisamos lembrar?

① [Definições].

• Um inteiro positivo $d \in \mathbb{Z}$ é maximo div. comum se: (de a, b)

1) $d|a$ e $d|b$ ← div. comum

2) Se $c|a$ e $c|b \Rightarrow c|d$ ← maximalidade (de a, b)

• Um inteiro positivo $m \in \mathbb{Z}$ é minimo mult. comum se

1) $a|m$ e $b|m$ ← mult. comum

2) Se $a|m'$ e $b|m' \Rightarrow m|m'$ ← minimal.

② [Como procurar].

(Algoritmo de Euclides). $\boxed{\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)}$ se
 $a = b \cdot q + r$, para algum q .

$\boxed{\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = a \cdot b}$, se $a > 0, b > 0$.

(Atraves primos)

Se: $a = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_s^{d_s}$

$b = p_1^{p_1} \cdot p_2^{p_2} \cdot \dots \cdot p_s^{p_s}$

$p_1, p_2, \dots, p_s$ primos distintos

$\Rightarrow \text{mdc}(a, b) = p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot \dots \cdot p_s^{j_s}$
 $\text{mmc}(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\delta_s}$
 $j_i = \min\{d_i, p_i\}, \delta_i = \max\{d_i, p_i\}$

© [Teorema de Bezout]

(2)

Existem $r, s \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\text{mdc}(a, b) = a \cdot r + b \cdot s.$$

Exercício 1 Encontre mdc e mmc entre 119 e 279

$$279 = (2) \cdot 119 + 41 \quad \Rightarrow \quad 41 = 279 - (2) \cdot 119$$

$$119 = (2) \cdot 41 + 37 \quad \Rightarrow \quad 37 = 119 - (2) \cdot 41$$

$$41 = (1) \cdot 37 + 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 41 - (1) \cdot 37$$

$$37 = (9) \cdot 4 + (1) \quad \Rightarrow \quad 1 = 37 - (9) \cdot 4$$

$$\Rightarrow \text{mdc}(279, 119) = 1$$

$$\text{Assim } \text{mmc}(279, 119) = 279 \cdot 119 = 33201$$

Invertendo alq. de Euclides, temos

$$1 = 37 - (9) \cdot 4 = 37 - (9) \cdot (41 - (1) \cdot 37) =$$

$$= (10) \cdot 37 - (9) \cdot 41 = (10) \cdot (119 - (2) \cdot 41) - (9) \cdot 41$$

$$= (10) \cdot 119 - (29) \cdot 41 = (10) \cdot 119 - (29) \cdot (279 - (2) \cdot 119) =$$

$$= (68) \cdot 119 - (29) \cdot 279$$

$$\Rightarrow \quad 279 \cdot \underbrace{(-29)}_r + 119 \cdot \underbrace{68}_s = 1$$

$$\text{mdc}(279, 119)$$

③

Exercício 2 Mostre que $\text{mdc}(2^m, 3^n) = 1$
para todas $n, m > 0$.

Solução. Como: $a = 2^m \cdot 3^0$ $\Rightarrow$ $\text{mdc}(2^m, 3^n) = 2^0 \cdot 3^0 = 1$
 $b = 2^0 \cdot 3^n \Rightarrow \text{mmc}(2^m, 3^n) = 2^m \cdot 3^n //$

Exercício 3 Sejam a, b, c tais que
 $a \mid b$ e $\text{mdc}(b, c) = 1$. Mostre que $\text{mdc}(a, c) = 1$

Solução $1 = \text{mdc}(b, c) \Leftrightarrow 1 = b \cdot x + c \cdot y$ para
algum $x, y \in \mathbb{Z}$.

Assim, como $\text{mdc}(b, c) = 1$, então

$$b \cdot x_0 + c \cdot y_0 = 1 \text{ para alguns } x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$$

Como $a \mid b \Rightarrow b = a \cdot q$, agora

$$\begin{aligned} 1 = b \cdot x_0 + c \cdot y_0 &= (a \cdot q) \cdot x_0 + c \cdot y_0 \\ &= a \cdot (q \cdot x_0) + c \cdot y_0 \\ &= a \cdot x'_0 + c \cdot y_0 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{mdc}(a, c) = 1 //$$

Exercício 4 (Lista 2, 7b)

Assumindo $\text{mdc}(a, b) = 1$, mostre que

$$\text{mdc}(2a+b, a+2b) = 1 \text{ ou } 3.$$

(4)

Solução Seja $d = \text{mdc}(2a+b, a+2b)$.

Assim $d \mid 2a+b$ e $d \mid a+2b$

$$\Rightarrow d \mid (2a+b) \cdot 2 - (a+2b) = 3a, \quad e$$

$$d \mid (2a+b)(-1) + (a+2b) = 3b$$

Assim $d \mid 3a$ e $d \mid 3b$, mas $\text{mdc}(a, b) = 1$

$$\Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow \boxed{d=1 \text{ ou } d=3} //$$

Exercício 5 Mostre que

$$\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(m-n, n).$$

Solução Sejam $d = \text{mdc}(m, n)$
 $d' = \text{mdc}(m-n, n)$

$$\begin{cases} d \mid m \\ d \mid n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid m-n \\ d \mid n \end{cases} \Rightarrow \boxed{d \mid d'}$$

$$\begin{cases} d' \mid m-n \\ d' \mid n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid m \\ d' \mid n \end{cases} \Rightarrow \boxed{d' \mid d}$$

$$\Rightarrow d = d' \quad \text{pois ambos positivos} //$$

Exercício 6 Sejam a, m, n inteiros positivos, ⑤

com $\text{mdc}(a, n) = 1$ e $\text{mdc}(a, m) = 1$.

Mostre que $\text{mdc}(a, m \cdot n) = 1$.

Solução.

$$\text{mdc}(a, n) = 1 \Rightarrow a \cdot x_1 + n \cdot y_1 = 1$$

$$\text{mdc}(a, m) = 1 \Rightarrow a \cdot x_2 + m \cdot y_2 = 1$$

Agora

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot x_1 + n \cdot y_1 = a \cdot x_1 + 1 \cdot n \cdot y_1 \\ &= a \cdot x_1 + (a \cdot x_2 + m \cdot y_2) \cdot n \cdot y_1 \\ &= a \cdot x_1 + a \cdot x_2 \cdot n \cdot y_1 + m \cdot n \cdot y_1 \cdot y_2 \\ &= a(x_1 + x_2 \cdot n \cdot y_1) + m \cdot n(y_1 \cdot y_2) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \cdot x' + m \cdot n \cdot y' = 1$$

$$\Rightarrow \text{mdc}(a, m \cdot n) = 1 //$$

Exercício 7 Suponha que $a + b = c^2$, mostre que

$$\text{mdc}(a, c) = \text{mdc}(b, c)$$

Solução Sejam: $d = \text{mdc}(a, c)$

$$e = \text{mdc}(b, c)$$

Mostremos que $d \mid e$, e $e \mid d$.

Como: $\begin{cases} d|a \\ d|c \end{cases}$, assim $d|c^2$, e $d|\underbrace{c^2 - a}_b$

(6)

$$\Rightarrow \begin{cases} d|b \\ d|c \end{cases} \Rightarrow \boxed{d|e}$$

Agora: $\begin{cases} e|b \\ e|c \end{cases} \Rightarrow e|c^2$ e $d|\underbrace{c^2 - b}_a$

$$\Rightarrow \begin{cases} e|a \\ e|c \end{cases} \Rightarrow \boxed{e|d}$$

Assim $\boxed{e=d}$ //

Exercício 8 (Lista 3, Ex. 16). Seja $a, b \in \mathbb{Z}$, e

$$\text{mdc}(a, b) = p \text{ - um primo.}$$

O que pode dizer sobre $\text{mdc}(a^2, b)$ e $\text{mdc}(a^2, b^2)$?

Solução Como $\text{mdc}(a, b) = p \Rightarrow a \cdot r + b \cdot s = p$.

$$\text{Ou } a^2 \cdot r^2 + 2a \cdot r \cdot b \cdot s + b^2 \cdot s^2 = p^2$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot r^2 + b(2a \cdot r \cdot s + b s^2) = p^2$$

Assim $\text{mdc}(a^2, b) \mid p^2$, por outro lado

$\text{mdc}(a, b) \mid \text{mdc}(a^2, b)$, ou seja $p \mid \text{mdc}(a^2, b)$

Assim $\text{mdc}(a^2, b) = p$ ou p^2 (pois p -primo)

e ambas opções possíveis, pois

$$\text{mdc}(\underbrace{a^2}_{a^2}, \underbrace{p}_{b}) = p \quad \text{e} \quad \text{mdc}(\underbrace{p^2}_{a^2}, \underbrace{p^2}_{b}) = p^2$$

Na mesma maneira mostre que (7)
 $\text{mdc}(a^2, b^2) = p \text{ ou } p^2 \text{ ou } p^3$
(trabalho p/ casa).

Exercício 9 (p/ casa)

Mostre que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b+3a, a)$

Exercício 10 (p/ casa)

Suponha $\text{mdc}(a, b) = 1$, mostre que
 $\text{mdc}(a+b, a^2+b^2) = 1 \text{ ou } 2$.

Exercício 11 (p/ casa)

Se $\text{mdc}(a, b) = 1$, mostre que $\text{mdc}(a^2, b^2) = 1$.

Exercício 12 (p/ casa)

Se $\text{mdc}(m, n) = 1$, e $\text{mdc}(a, m) = 1 = \text{mdc}(b, n)$,
mostre que
 $\text{mdc}(a \cdot b, m \cdot n) = 1 //$