

Aula 17.04.2020

Revisão 1

① Indução finita

Exercício 1 Mostre que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

Solução

Base: $n=1 \Rightarrow 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} - \text{vale}$

Hipótese: $n=k \Rightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}$

Passo: $n=k+1$, mostremos

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)}{3}$$

Hipótese ||

$$\frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3} + (k+1) \cdot (k+2)$$

||

$$\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{3} [k+3]$$

$$= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)}{3} =$$

Exercício 2 Mostre que $8 \mid 3^{2^n} - 1$, para $n \geq 0$ (2)

Solução:

Base: $(n=0)$, $8 \mid \underbrace{3^{2 \cdot 0} - 1}_0$ verdade

Hipótese: $(n=k)$, $8 \mid 3^{2^k} - 1$.

Passo: Considere $3^{2(k+1)} - 1$, assim

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2k} - 1 = 9 \cdot 3^{2k} - 1$$

$$= 8 \cdot 3^{2k} + \underbrace{3^{2k} - 1}$$

múltiplo de 8 múltiplo de 8 por hipótese

Exercício 3 (Lista 1, 7r)

Mostre que $11 \mid 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$, $n \geq 1$

Solução Base: $(n=1)$, $6^{2 \cdot 1 - 2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} = 1 + 9 + 1 = 11$ verdadeiro.

Hipótese: $(n=k)$ $11 \mid 6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1}$

Passo: $(n=k+1)$ Considere $6^{2(k+1)-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1}$,

temos $6^{2(k+1)-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1} = 6^2 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 3^{k-1} =$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot [6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1}]$$

múltiplo de 11

múltiplo de 11 por hipótese

Exercício 4 Mostre que

(Lista 1, 17c)

(3)

$$F_n \cdot F_{n+2} - (F_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}, \text{ onde}$$

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \dots$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Solução Base $(n=1)$ $F_1 \cdot F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1 = (-1)^{1+1}$

Hipótese: $(n=k)$ $F_k \cdot F_{k+2} - (F_{k+1})^2 = (-1)^{k+1}$

Passo: $(n=k+1)$

$$\begin{aligned} F_{k+1} \cdot F_{k+3} - (F_{k+2})^2 &= F_{k+1} (F_{k+1} + F_{k+2}) - (F_{k+2})^2 \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+1} + F_{k+1} \cdot F_{k+2} - (F_{k+2})^2 = \\ &= (F_{k+1})^2 - F_{k+2} \underbrace{(F_{k+2} - F_{k+1})}_{F_k} = \\ &= \underbrace{(F_{k+1})^2 - F_{k+2} \cdot F_k}_{\text{Hipótese}} \xrightarrow{\text{Hipótese}} (-1) \cdot (-1)^{k+1} = (-1)^{k+2} // \end{aligned}$$

Exercício 5 (Lista 1, 16b)

Mostre que $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 2$

Solução: Base $(n=2)$ $(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2+1}{2 \cdot 2} //$

Hipótese: $(n=k)$ $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{k+1}{2 \cdot k}$

Passo: $h = k+1$

(4)

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)}_{\text{Hipótese}} \stackrel{?}{=} \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Hipótese //

$$\frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot \left[\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2} \right]$$

//

$$\frac{k^2 + 2k + 1 - 1}{2 \cdot k \cdot (k+1)}$$

$$=$$

$$\frac{k+2}{2 \cdot (k+1)} //$$

(2) Divisibilidade

Exercício 6 (Lista 2, 6)

Mostre que todo inteiro da forma $6k+5$ é também da forma $3 \cdot k+2$. Mas o contrário é falso.

Solução

$$6k+5 = 3 \cdot 2k + \overset{5}{\underbrace{3+2}} = 3 \cdot \underbrace{(2k+1)}_{k'} + 2 = 3 \cdot k' + 2.$$

Por outro lado $8 = 3 \cdot 2 + 2$, ou seja $8 = 3k+2$, $k=2$,
mas $8 \neq 6k+5$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ //

Exercício 7 (Lista 2, 5a)

(5)

Mostre que $30 \mid a^5 - a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$

Solução: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Como 2, 3, 5 são primos entre si, basta ver que $2 \mid a^5 - a$, $3 \mid a^5 - a$ e $5 \mid a^5 - a$.

$$a^5 - a = a \cdot (a^4 - 1) = a \cdot (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \cdot (a^2 + 1)$$

$(a-1) \cdot a$ é par, pois produto de 2 inteiros consecutivos,

$(a-1) \cdot a \cdot (a+1)$ é múltiplo de 3, pois produto de 3 inteiros consecutivos.

Assim $2 \mid a^5 - a$ e $3 \mid a^5 - a$.

Aplicue Algo da divisão de a por 5, assim

$a = 5q + r$, com $0 \leq r < 5$, se:

$$\boxed{r=0} \Rightarrow a = 5q \Rightarrow 5 \mid a \Rightarrow 5 \mid a^5 - a$$

$$\boxed{r=1} \Rightarrow a = 5q + 1 \Rightarrow 5 \mid a - 1 \Rightarrow 5 \mid a^5 - a$$

$$\boxed{r=2} \Rightarrow a = 5q + 2 \Rightarrow a^2 + 1 = (5q + 2)^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 4 + 1 = 5 \cdot q' \Rightarrow 5 \mid a^5 - a$$

$$\boxed{r=3} \Rightarrow a = 5q + 3 \Rightarrow a^2 + 1 = (5q + 3)^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 9 + 1 = 5 \cdot q'' \Rightarrow 5 \mid a^5 - a$$

$$\boxed{r=4} \Rightarrow a = 5q + 4 \Rightarrow 5 \mid a + 1 \Rightarrow 5 \mid a^5 - a$$

Assim 5 sempre divide $a^5 - a$ //

Exercício 8 | Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ ⑥

(Ex. 13, Lista 2) assim $7 \mid a$ ou $7 \mid b$

Solução: Suponha que $7 \nmid a$ e $7 \nmid b$

Assim $a = 7q_1 + r_1$, com $1 \leq r_1 < 7$

$b = 7q_2 + r_2$, com $1 \leq r_2 < 7$

$$a^2 + b^2 = (7q_1 + r_1)^2 + (7q_2 + r_2)^2 = 49(q_1^2 + q_2^2) + 14(q_1r_1 + q_2r_2) + r_1^2 + r_2^2, \text{ assim}$$

Como $7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow 7 \mid r_1^2 + r_2^2$

Sem perda de generalidade suponha que $r_1 \leq r_2$

Analisando os restos possíveis temos

$(1, 1)$ 2	$(1, 2)$ 5	$(1, 3)$ 10	$(1, 4)$ 17	$(1, 5)$ 26	$(1, 6)$ 37
$(2, 2)$ 8	$(2, 3)$ 13	$(2, 4)$ 18	$(2, 5)$ 25	$(2, 6)$ 40	
	$(3, 3)$ 18	$(3, 4)$ 25	$(3, 5)$ 34	$(3, 6)$ 45	
		$(4, 4)$ 32	$(4, 5)$ 41	$(4, 6)$ 52	
			$(5, 5)$ 50	$(5, 6)$ 61	
				$(6, 6)$ 72	

Assim temos que $r_1^2 + r_2^2$ não é múltiplo de 7 para todas opções!

Contradição $\Rightarrow 7 \mid a$ ou $7 \mid b$.

Exercício 9

Suponha que $p, p+2$ dois primos. Mostre que se $p > 5$, assim

$$12 \mid p + (p+2)$$

Solução Basta ver que $4 \mid p + (p+2)$, e $3 \mid p + (p+2)$

Como $p > 5$ e primo, assim $p = 2k+1$, e $p+2 = 2k+3$

Assim $p + (p+2) = 2k+1 + 2k+3 = 4k+4 = 4(k+1)$

$$\Rightarrow \boxed{4 \mid p + (p+2)}$$

Aplicando Alg. da divisão, $p = 3 \cdot q + r$, com $0 \leq r < 3$

$\boxed{r=0} \Rightarrow p = 3q$ - não é primo

$\boxed{r=1} \Rightarrow p+2 = 3q+3 = 3(q+1)$ não é primo.

Assim única opção é $\boxed{r=2}$, neste caso

$$p = 3q+2, \quad p+2 = 3q+2+2$$

$$\Rightarrow p + (p+2) = 3q+2 + 3q+4 = 6(q+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{3 \mid p + (p+2)}$$