

Nosso objetivo é construir os racionais a partir dos inteiros. Assim vamos fazer isso como classes da equivalência da certa relação. Vamos começar com definições.

Relação de Equivalência

Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação em X (isto é um subconjunto de $X \times X$)

Se x estiver relacionado com y , escrevemos $x \sim y$.

Dizemos que $\sim$ uma relação de equivalência

se: (i) $a \sim a$, para todo $a \in X$ (reflexiva)

(ii) $a \sim b$, implique $b \sim a$ (simetria)

(iii) $a \sim b$ e $b \sim c$ implique $a \sim c$ (transitividade)

Denotamos por $C(a) = \{b \in X : b \sim a\}$

a classe de equivalência de elemento $a \in X$.

Exemplo $X = \mathbb{Z}$, define

$$a \sim b \iff a \equiv b \pmod{2}$$

$$\text{Assim } C(a) = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \pmod{2}\}$$

Em particular, $C(0)$ — todos pares.

$C(1)$ — todos ímpares.

$C(2)$ — todos pares

$\vdots$

Proposição Seja X um conjunto com relação de equivalência $\sim$. Então:

- 1) $a \in C(a)$, para todo $a \in X$.
- 2) $a \sim b \iff C(a) = C(b)$
- 3) $C(a) \cap C(b) = \emptyset$, se $a \not\sim b$.
- 4) $X = \bigcup_{a \in X} C(a)$.

Prova 1) $a \sim a$, assim $a \in C(a)$.

2) $[\Rightarrow]$ Se $c \in C(a)$, assim $c \sim a$. Por hipótese $a \sim b$, assim $c \sim b$ e $c \in C(b)$.

Analogamente $C(b) \subset C(a)$. Assim, $C(a) = C(b)$.

$[\Leftarrow]$ $a \in C(a) = C(b) \Rightarrow a \sim b$.

3) Supondo que $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$, seja

③

$c \in (C(a) \cap C(b))$, assim

$$\left. \begin{array}{l} c \in C(a) \\ c \in C(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c \sim a \\ c \sim b \end{array} \right\} \Rightarrow a \sim b \Rightarrow C(a) = C(b)$$

Contradição.

4) $a \in C(a) \Rightarrow$

$$\bar{X} = \bigcup_{a \in X} \{a\} \subset \bigcup_{a \in X} C(a). \text{ Por outro lado,}$$

$$C(a) \subset X, \text{ assim } \bigcup_{a \in X} C(a) \subset \bar{X}.$$

$$\text{Assim } \bar{X} = \bigcup_{a \in X} C(a)$$



Se $\bar{X}$ - é um conjunto com relação de equivalência $\sim$, denotamos por $\bar{X}/\sim$ o conjunto quociente de $\bar{X}$ dado por.

$$\bar{X}/\sim = \{C(a) \mid a \in X\}.$$

Exemplo $X = \mathbb{Z}$, e $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$

$$\text{Assim } C(a) = \bar{a}.$$

$$\text{Assim } \bar{X}/\sim = \mathbb{Z}/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\} = \mathbb{Z}_m.$$

(4)

Construção dos números racionais $\mathbb{Q}$.

Considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, com
 $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ - inteiros sem zero, ou seja

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z} - \text{inteiros} \atop b \neq 0 \}.$$

Defina relação $\sim$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ como

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

Obs. Pensamos (a, b) como fração $\frac{a}{b}$.

$$\text{Agora } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = cb \iff (a, b) \sim (c, d).$$

Proposição $\sim$ é uma relação de equivalência
em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Prova (i) $(a, b) \sim (a, b)$ pois $a \cdot b = b \cdot a$.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad (a, b) \sim (c, d) &\Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow c \cdot b = d \cdot a \\ &\Rightarrow (c, d) \sim (a, b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad (a, b) \sim (c, d) &\Rightarrow ad = bc \\ (c, d) \sim (e, f) &\Rightarrow cf = de \Rightarrow adf = bcf \Rightarrow \end{aligned}$$

(3)

$$\Rightarrow adf = bde \Rightarrow af = be$$

$$\Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$$



Denotamos a classe de equivalência $C(a, b)$ por $\frac{a}{b}$, isto é

$$\frac{a}{b} = \{ (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (c, d) \sim (a, b) \}$$

$$= \{ (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid ad = b \cdot c \}$$

E denotamos por $\mathbb{Q}$ o conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$ chamado conjunto dos racionais.

Operações em $\mathbb{Q}$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ ($\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$), definimos

$$\alpha + \beta = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \quad \alpha \beta = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Lema Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ então

$$\textcircled{1} \quad \frac{a'd' + b'c'}{b'd'} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a'c'}{b'd'} = \frac{ac}{bd}$$

Prova Como $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, assim ⑥

$$ab' = b \cdot a' \quad \text{e} \quad cd' = d \cdot c', \text{ Agora}$$

① equivalente a $(a'd' + b'c')(bd) = (b'd')(ad + bc)$

② $\iff a \cdot c' \cdot b \cdot d = b' \cdot d' \cdot a \cdot c$

De $ab' = a'b$ temos $ab'dd' = ba'dd'$
e $cd' = c'd \implies cd'bb' = c'dbb'$

Assim $ac b'd' = bda'c'$

e $(a'd' + b'c')bd = b'd'(ad + bc)$ $\square$

Consequências:

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longmapsto \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longmapsto \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

São operações bem-definidas em $\mathbb{Q}$.

Propriedades:

7

Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ temos:

$$1) \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$2) \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$3) \text{ Existe } 0 \in \mathbb{Q} \text{ t.q. } \alpha + 0 = \alpha$$

$$4) \text{ Existe } -\alpha \in \mathbb{Q} \text{ t.q. } \alpha + (-\alpha) = 0$$

$$5) \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

$$6) \text{ Existe } 1 \text{ t.q. } \alpha \cdot 1 = \alpha$$

$$7) \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

$$8) \text{ Para todo } \alpha \neq 0, \text{ existe } \alpha^{-1} \in \mathbb{Q}, \text{ t.q. } \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1.$$

$$9) \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \beta + \alpha \gamma$$

Prova ^[ideia] 3) Defina $0 = \frac{0}{1} = \{ (0, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid m \neq 0 \}.$

$$4) \text{ Se } \alpha = \frac{a}{b}, \text{ define } -\alpha = -\frac{a}{b}, \text{ temos}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a \cdot b + (-b \cdot a)}{b^2} = \frac{0}{b^2} = 0$$

$$5) 1 = \frac{m}{m} = \{ (m, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid m \neq 0 \}.$$

Ordem em $\mathbb{Q}$

⑧

Def. Dados dois racionais $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$,
dizemos que α é menor igual β
($\alpha \leq \beta$) se $a \cdot d \leq b \cdot c$.

Proposição Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, temos

(i) $\alpha \leq \alpha$

Reflexiva

(ii) Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, assim $\alpha = \beta$

Anti-Simetria

(iii) Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$,

e $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \gamma$, assim $\alpha \leq \gamma$

Transitiva

Obs. Temos $a/1 \leq b/1$ em $\mathbb{Q} \Leftrightarrow a \leq b$ em $\mathbb{Z}$.

Obs 2 O princípio de Boa ordem não vale
em $\mathbb{Q}$!!!

Counter-example Seja $A = \{ 1/a : a \in \mathbb{Z}, a > 0 \}$

A possui somente elementos positivos,
mas A não tem elemento minimal.

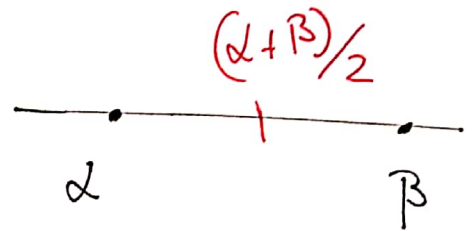
Propriedade Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ com $\alpha < \beta$

Então existe um racional γ tal que

$$\alpha < \gamma < \beta$$

Prova

Seja $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$.



Defina $\gamma = \frac{ad+bc}{2bd}$. Como $\alpha < \beta$, assim, $ad < bc$

Logo $2ad < ad+bc$, e

$2adb < (ad+bc) \cdot b$, portanto

$$\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} \quad \text{Analogamente} \quad \gamma < \beta \quad \square$$

"α"
"γ"

Propriedade [Arquimedeana]

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ positivos. Existe $n \in \mathbb{Z}$

tal que $n \cdot \alpha \geq \beta$.

Prova [Exercício p/ casa].