Prova 2 com respostas

MAT0120 — 2° SEMESTRE DE 2020

Exercício 1.
Resolva o sistema

$$\begin{cases} x & \equiv & 3 & (\mathrm{mod}\, 2) \\ 2x & \equiv & 1 & (\mathrm{mod}\, 3) \\ 12x & \equiv & 6 & (\mathrm{mod}\, 13) \end{cases}$$

Solução 1.
Multiplicando a segunda equação por 2 e a terceira por -1, temos:

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 & (\mathrm{mod}\, 2) \\ x & \equiv & 2 & (\mathrm{mod}\, 3) \\ x & \equiv & 7 & (\mathrm{mod}\, 13) \end{cases}$$

Como $\mathrm{mdc}(2,3) = \mathrm{mdc}(2,13) = \mathrm{mdc}(3,13) = 1$, o sistema tem solução.

$$\begin{cases} N_1 = 3 \cdot 13 & = & 39 \\ N_2 = 2 \cdot 13 & = & 26 \\ N_3 = 2 \cdot 3 & = & 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 39r_1 & \equiv & 1 & (\mathrm{mod}\, 2) \\ 26r_2 & \equiv & 1 & (\mathrm{mod}\, 3) \\ 6r_3 & \equiv & 1 & (\mathrm{mod}\, 13) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 & \equiv & 1 & (\mathrm{mod}\, 2) \\ r_2 & \equiv & 2 & (\mathrm{mod}\, 3) \\ r_3 & \equiv & 11 & (\mathrm{mod}\, 13) \end{cases}$$

$$x \equiv 39 \cdot 1 \cdot 1 + 26 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 11 \cdot 7 (\mathrm{mod}\, 2 \cdot 3 \cdot 13)$$

$$x \equiv 605 \equiv 59 (\mathrm{mod}\, 78).$$

Exercício 2.

a) Encontre o resto da divisão de 62! por 67.

b) Mostre que $n^{25} - n$ é múltiplo de 26 para todo inteiro n.

Solução 2.

a) Como 67 é primo, pelo Teorema de Wilson, temos:

$$\begin{aligned} 66! &\equiv -1 (\mathrm{mod}\, 67) \\ 66 \cdot 65 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 62! &\equiv -1 (\mathrm{mod}\, 67) \\ (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 62! &\equiv -1 (\mathrm{mod}\, 67) \\ 24 \cdot 62! &\equiv -1 (\mathrm{mod}\, 67) \\ 14 \cdot 24 \cdot 62! &\equiv 14 \cdot (-1) (\mathrm{mod}\, 67) \\ 62! &\equiv -14 (\mathrm{mod}\, 67) \\ 62! &\equiv 53 (\mathrm{mod}\, 67) \end{aligned}$$

Logo, o resto é 53.

b) Note que $n^{25} - n = n(n^{24} - 1)$ e que n e $n^{24} - 1$ têm paridades distintas, então $n^{24} - n \equiv 0(\mathrm{mod} 2)$. Além disso, pelo teorema de Fermat, temos:

$$n^{13} \equiv n(\mathrm{mod} 13)$$

$$n^{25} = n^{13} \cdot n^{12} \equiv n \cdot n^{12} \equiv n^{13} \equiv n(\mathrm{mod} 13) \Rightarrow n^{25} - n \equiv 0(\mathrm{mod} 13).$$

Assim:

$$n^{25} - n \equiv 0(\mathrm{mod}\, \mathrm{mmc}(2, 13))$$
$$n^{25} - n \equiv 0(\mathrm{mod} 26).$$

Portanto, $26 \mid n^{25} - n$.

Exercício 3.
Obter o resto da divisão de

$$6^{19} + 7^{19} + \cdots + 99^{19} + 100^{19}$$

por 19.

Solução 3.
Pelo Teorema de Fermat, temos:

$$\left\{\begin{array}{ccll} 6^{19} & \equiv & 6 & (\mathrm{mod} 19) \\ 7^{19} & \equiv & 7 & (\mathrm{mod} 19) \\ & \vdots & & \\ 99^{19} & \equiv & 99 & (\mathrm{mod} 19) \\ 100^{19} & \equiv & 100 & (\mathrm{mod} 19) \end{array}\right. \Rightarrow 6^{19}+7^{19}+\cdots+99^{19}+100^{19} \equiv 6+7+\cdots+99+100 = 53\cdot 95 \equiv 0(\bmod 19).$$

Logo, o resto é zero.

Exercício 4.
Resolva em $\mathbb{Z}_{44}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 26y + 40z & = & 41 \\ x + 18y + 4z & = & 3 \\ 10x + y - 4z & = & 3 \end{array}\right.$$

Solução 4.
Somando as duas primeiras equações, temos $2x = 0$, que possui soluções $x = 0$ ou $x = 22$. Somando as duas últimas equações temos $11x + 19y = 6$.

Para $x = 0$, temos $19y = 6$. Como $\mathrm{mdc}(19, 44) = 1$, então 19 tem inverso multiplicativo, que é 7. Assim, multiplicando os dois membros da equação por 7, temos $y = 42$. Substituindo $x = 0$ e $y = 42$ na segunda equação, temos $4z = 39$, o que não tem solução pois o lado esquerdo é sempre par.

Para $x = 22$, temos $19y = 28$. Como $\mathrm{mdc}(19, 44) = 1$, então 19 tem inverso multiplicativo, que é 7. Assim, multiplicando os dois membros da equação por 7, temos $y = 20$. Substituindo $x = 22$ e $y = 20$ na segunda equação, temos $4z = 25$, o que não tem solução pois o lado esquerdo é sempre par.

Logo, $S = \emptyset$.

Exercício 5.
Seja $n = p^2 \cdot q^3$, com p e q são primos distintos. Determine n, sabendo que:

1) $\varphi(n) = 36$
2) $\varphi(n) = 7260$

Solução 5.
Temos que $\varphi(n) = \varphi(p^2) \cdot \varphi(q^3) = (p^2 - p) \cdot (q^3 - q^2) = p \cdot q^2(p-1)(q-1)$

1) Temos que $36 = 2^2 \cdot 3^2$ e então $2^2 \cdot 3^2 = pq^2(p-1)(q-1)$ Assim:
   - se $p = 2$ e $q = 3$, temos $\varphi(2^2 \cdot 3^3) = (2^2 - 2)(3^3 - 3^2) = 2 \cdot 18 = 36$, logo $n = 108$ é solução;
   - $\varphi(3^2 \cdot 2^3) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3) = 4 \cdot 6 = 24$, logo $n = 72$ não é solução.

   Assim, a única solução é $n = 108$
2) Temos que $7260 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^2$ e então $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^2 = pq^2(p-1)(q-1)$ Assim:
   - se $q = 2$, então $p(p-1) = 165$, que não tem solução nos inteiros;
   - se $q = 11$, então $p(p-1) = 6$, que possui solução $p = 3$.

   Assim, a única solução é $n = 3^2 \cdot 11^3 = 11979$