Prova 1 com respostas

MAT0120 — 1° SEMESTRE DE 2020

Exercício 1.

a) Mostre que 225 divide
$$2^{4k} - 15k - 1$$
para todo $k \geqslant 0$.

b) Mostre que
$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2\left(2^n - 1\right)$$
para todo $n \geqslant 1$.

Solução 1.

a) Vamos provar por indução em k.

Base: Para $k = 0$, temos $2^{4\cdot 0} - 15 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0 = 225 \cdot 0$;

Hipótese: Para $k = p$, suponha que $225 \mid 2^{4p} - 15p - 1$, ou seja, $2^{4p} = 225q + 15p + 1$, para algum $q \in \mathbb{Z}$;

Passo: Para $k = p + 1$, temos
$$\begin{aligned} 2^{4(p+1)} - 15\left(p+1\right) - 1 &= 16 \cdot \left(225q + 15p + 1\right) - 15p - 15 - 1 \\ &= 16 \cdot 225q + 240p + 16 - 15p - 16 \\ &= 225(16q + p). \end{aligned}$$

Logo, por PIF, a afirmação é verdadeira.

b) Vamos provar por indução em n.

Base: Para $n = 1$, temos $2^1 = 2\left(2^1 - 1\right) = 2 \cdot 1 = 2$;

Hipótese: Para $n = k$, suponha que $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2\left(2^k - 1\right)$;

Passo: Para $n = k + 1$, temos
$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2\left(2^k - 1\right) + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 2 \\ &= 2(2^{k+1} - 1). \end{aligned}$$

Logo, por PIF, a afirmação é verdadeira.

Exercício 2.

a) Encontre o resto da divisão de 38^{43} por 13.

b) Encontre o resto da divisão de 2^{37} por 17

Solução 2.

a)

$$\begin{aligned} 38 &\equiv -1 \pmod{13} \\ 38^{43} &\equiv (-1)^{43} \pmod{13} \\ 38^{43} &\equiv -1 \pmod{13} \\ 38^{43} &\equiv 12 \pmod{13} \end{aligned}$$

Portanto, o resto é 12.

b)

$$\begin{aligned} 2^4 &\equiv -1 \pmod{17} \\ \left(2^4\right)^9 &\equiv (-1)^9 \pmod{17} \\ 2^{36} &\equiv -1 \pmod{17} \\ 2 \cdot 2^{36} &\equiv 2 \cdot (-1) \pmod{17} \\ 2^{37} &\equiv -2 \pmod{17} \\ 2^{37} &\equiv 15 \pmod{17} \end{aligned}$$

Portanto, o resto é 15.

Exercício 3.
Sejam m e n dois inteiros, mostre que

$$\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(2n - m, n).$$

Solução 3.
Sejam $d = \text{mdc}(m, n)$ e $d' = \text{mdc}(2n - m, n)$. Assim:

$$d = \text{mdc}(m, n) \Rightarrow \begin{array}{l} d \mid m \\ d \mid n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d \mid -m \\ d \mid 2n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d \mid 2n - m \\ d \mid n \end{array} \Rightarrow d \mid \text{mmc}(2n - m, n) \Rightarrow d \mid d'.$$

Analogamente

$$d' = \text{mdc}(2n{-}m, n) \Rightarrow \begin{array}{l} d' \mid 2n - m \\ d' \mid n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d' \mid -(2n - m) + 2n \\ d' \mid n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d' \mid m \\ d' \mid n \end{array} \Rightarrow d' \mid \text{mmc}(m, n) \Rightarrow d' \mid d.$$

Assim, $d \mid d'$ e $d' \mid d$, logo $d = \pm d'$. Como $d \geqslant 0$ e $d' \geqslant 0$, então $d = d'$.

Exercício 4.

a) Determine todos os múltiplos de 30 e 42 cuja soma seja 24.

b) Resolva a congruência

$$2x \equiv 9 \pmod{5}.$$

Solução 4.

a) Desejamos encontrar os números do tipo $30x$ e $42y$, com $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $30x + 42y = 24$, ou seja, $5x + 7y = 4$. Como $\text{mdc}(5, 7) = 1$ e $1 \mid 4$, a equação diofantina tem solução.

   Note que $x_0 = -2$ e $y_0 = 2$ é uma solução particular da equação, enquanto todas as soluções são do tipo $x = -2 + 7t$ e $y = 2 - 5t$ para $t \in \mathbb{Z}$. Portanto, os múltiplos são do tipo $30(-2 + 7t)$ e $42(2 - 5t)$ para qualquer $t \in \mathbb{Z}$.

b) Como $\text{mdc}(2, 5) = 1$ e $1 \mid 9$, a congruência tem solução. Assim:

$$\begin{array}{rcll} 2x & \equiv & 9 & (\text{mod} 5) \\ 3 \cdot 2x & \equiv & 3 \cdot 9 & (\text{mod} 5) \\ 6x & \equiv & 27 & (\text{mod} 5) \\ x & \equiv & 2 & (\text{mod} 5). \end{array}$$

   Assim, $x = 2 + 5t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Exercício 5.
Encontre todos os primos p tais que $7p^2 + 8$ é um primo.

Solução 5.
Pelo algoritmo da divisão, $p = 3k + r$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$.

- Se $p = 3k$, então $p = 3$. Como $7 \cdot 3^2 + 8 = 7 \cdot 9 + 8 = 71$ é primo, então $p = 3$ é uma solução;
- Se $p = 3k + 1$, então $p^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3k' + 1$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo $7p^2 + 8 = 21k' + 9 = 3(7k' + 3)$, que não pode ser primo, pois $7k' + 3 \neq 1$;
- Se $p = 3k + 2$, então $p^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3k' + 1$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo $7p^2 + 8 = 21k' + 9 = 3(7k' + 3)$, que não pode ser primo, pois $7k' + 3 \neq 1$.

Logo, o único primo p tal que $7p^2 + 8$ é primo é o 3.