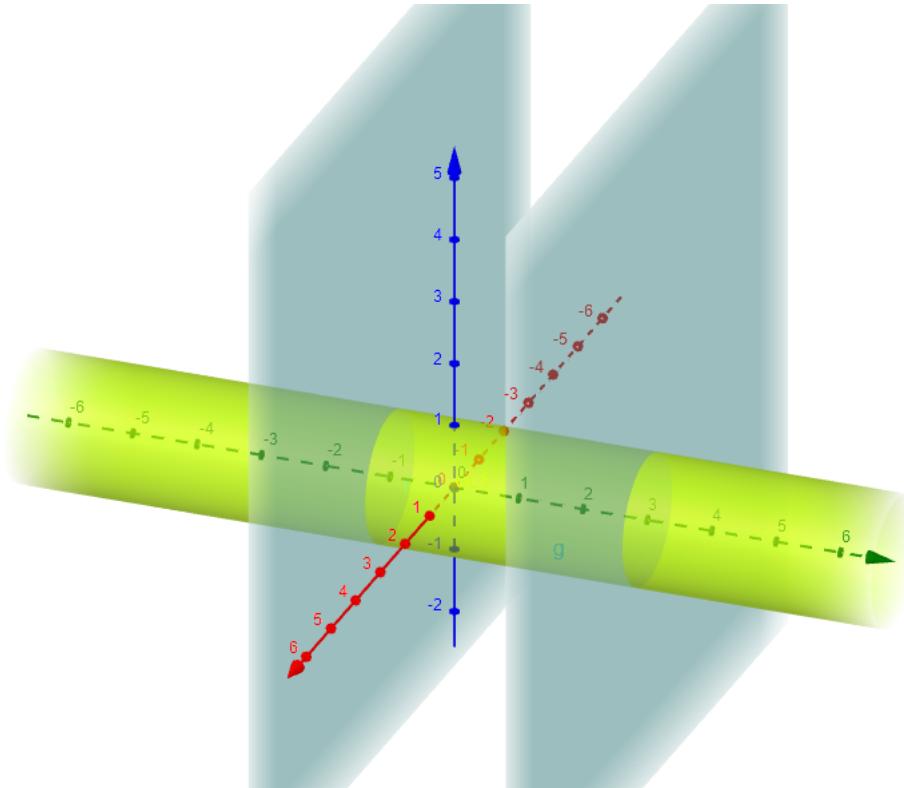


Gabarito
MAT2352 — Lista 5
Monitor: Juan Sebastián Herrera Carmona

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies abaixo e calcule sua área.
(b). S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$.

Demonstração. Vamos considerar a seguinte parametrização

$$\sigma(\theta, \rho) = (\cos \theta, \rho, \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -1 \leq \rho \leq 3$$



temos que a área esta dado por:

$$A = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \right\| d\theta d\rho$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\vec{i} \cos \theta - \vec{j} 0 + \vec{k} (-\sin \theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \right\| &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^3 1 d\rho d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 4 \cdot 2\pi \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

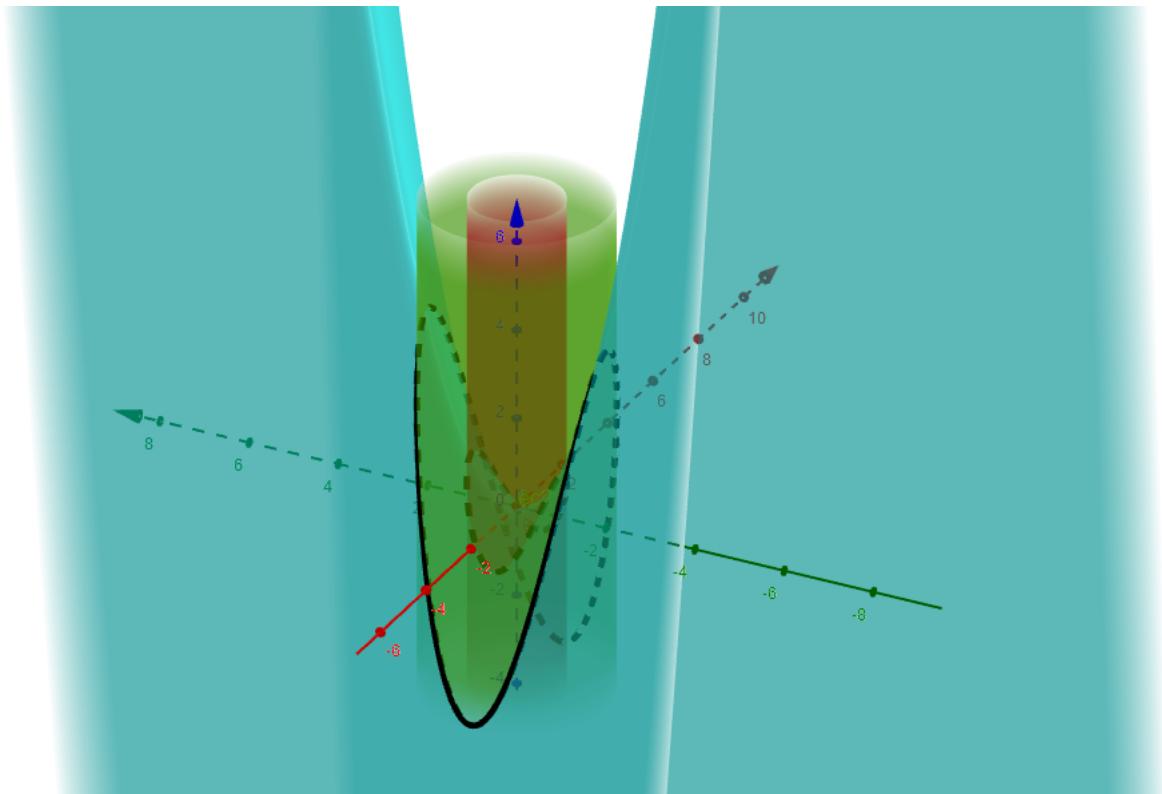
□

(d) S é a parte do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que esta entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Demonstração. Vamos considerar a parametrização

$$f(x, y) = (x, y, y^2 - x^2), \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

Observe a seguinte figura da superfície



A área esta determinada pela formula

$$A = \iint_K \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} \right\| dx dy, \quad K = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Por tanto, por calculo direito temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(2x) - \vec{j}(2y) + \vec{k}1. \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Assim

$$\iint_K \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4\rho^2 + 1} \rho d\rho d\theta,$$

isso foi usando mudança de coordenadas para coordenadas polares. Para calcular esta ultima integral vamos usar a integral auxiliar

$$\boxed{\int \sqrt{4\rho^2 + 1} \rho d\rho = \frac{1}{12}(4\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C}$$

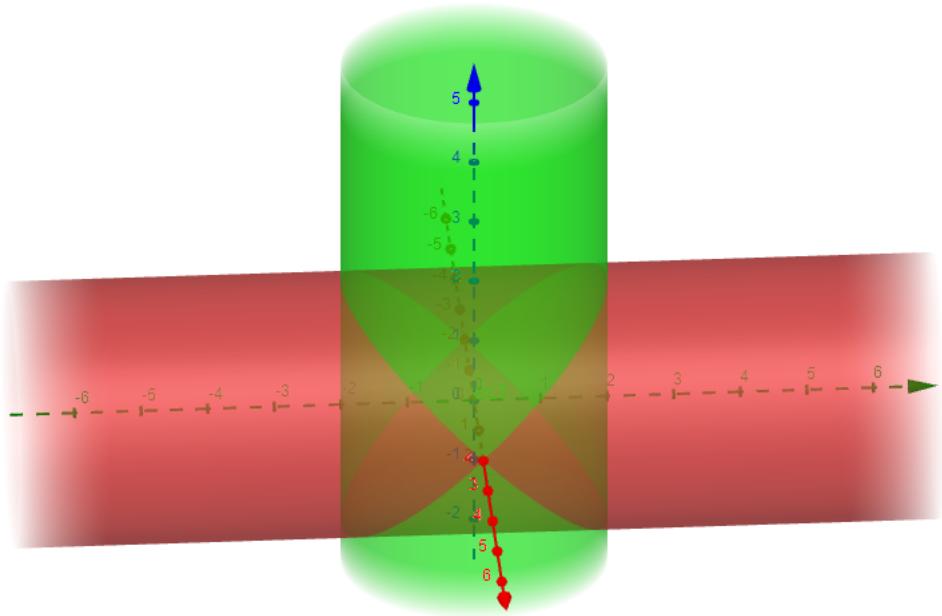
Logo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4\rho^2 + 1} \rho d\rho d\theta &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{4\rho^2 + 1} \rho d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{12}(16+1)^{3/2} - \frac{1}{12}5^{3/2} \right) \\ &= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

□

(e) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$.

Demonação. Consideremos a seguinte figura



Usando a simetria da superfície vemos que uma parametrização para a parte superior de esta superfície é dada por

$$f(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2}), \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$$

Para calcular a área da parte superior da superficial precisamos de

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) - \vec{j} 0 + \vec{k} 1 \end{aligned}$$

Logo

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} \right\| = \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2} + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

assim a área superficial é o duplo de

$$\frac{A}{2} = \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dy$$

Por ultimo para calcular este integral vamos considerar a seguinte parametrização da região de integração

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\} \\ &= \{-a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dy \\ &= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dy dx \\ &= \int_{-a}^a \frac{2a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2a \int_{-a}^a dx \\ &= 4a^2 \end{aligned}$$

Em conclusão dado que temos calculado só área superior da superfície, então a área da superfície e o duplo desta área, i.e.,

$$A = 2 \cdot 4a^2 = 8a^2.$$

□

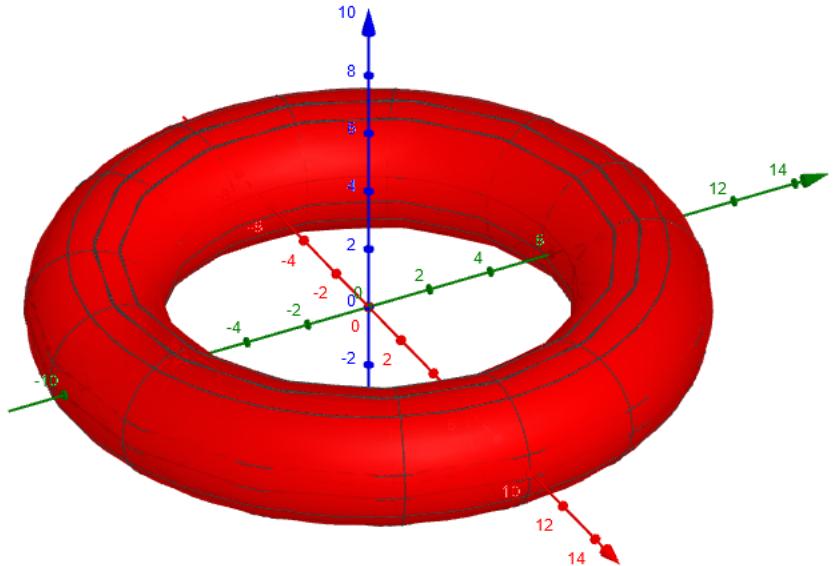
(g) S é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$ em torno do eixo z ;

Demonação. Consideremos a seguinte para metrização

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &= (b \cos \theta, b \sin \theta, 0) + a \cos \phi (0, 0, 1) + a \sin \phi (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ &= (b \cos \theta + a \sin \phi \cos \theta, b \sin \theta + a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi) \end{aligned}$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Considere o seguinte gráfico ilustrativo com $a = 2$ e $b = 8$.



Para calcular a área superficial precisamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -b \sin \theta - a \sin \phi \cos \theta & b \cos \theta + a \sin \phi \cos \theta & 0 \\ a \cos \phi \sin \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-a \sin \phi \cos \theta(b + a \sin \phi)) - \vec{j}(a \sin \phi \sin \theta(b + a \sin \phi)) \\ &\quad + \vec{k}(-\cos \phi(b + a \sin \phi)) \end{aligned}$$

Logo calculando a normal deste vetor temos

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f}{\partial \phi} \right\| = a(b + a \sin \phi)$$

Por tanto a área superficial fica dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + \sin \phi) d\phi d\theta \\ &= 2\pi b 2\pi a + 0 \\ &= 4\pi^2 b a. \end{aligned}$$

□

2. Sejam $0 < a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine as equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do

(a) eixo-x. Calcule a área da superfície em cada caso.

Demonstração. Consideremos a seguinte para metrização

$$\phi(x, \theta) = (x, f(x) \sin \theta, f(x) \cos \theta), \quad a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

assim para calcular a Área superficial precisamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(x) \cos \theta & f'(x) \sin \theta \\ 0 & -f(x) \sin \theta & f(x) \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(f(x)f'(x)) - \vec{j}(f(x) \cos \theta) + \vec{k}(-f(x) \sin \theta) \\ \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\| &= \sqrt{f^2(x)(f'(x)^2 + 1)} \\ &= f(x)\sqrt{f'(x)^2 + 1} \end{aligned}$$

Logo

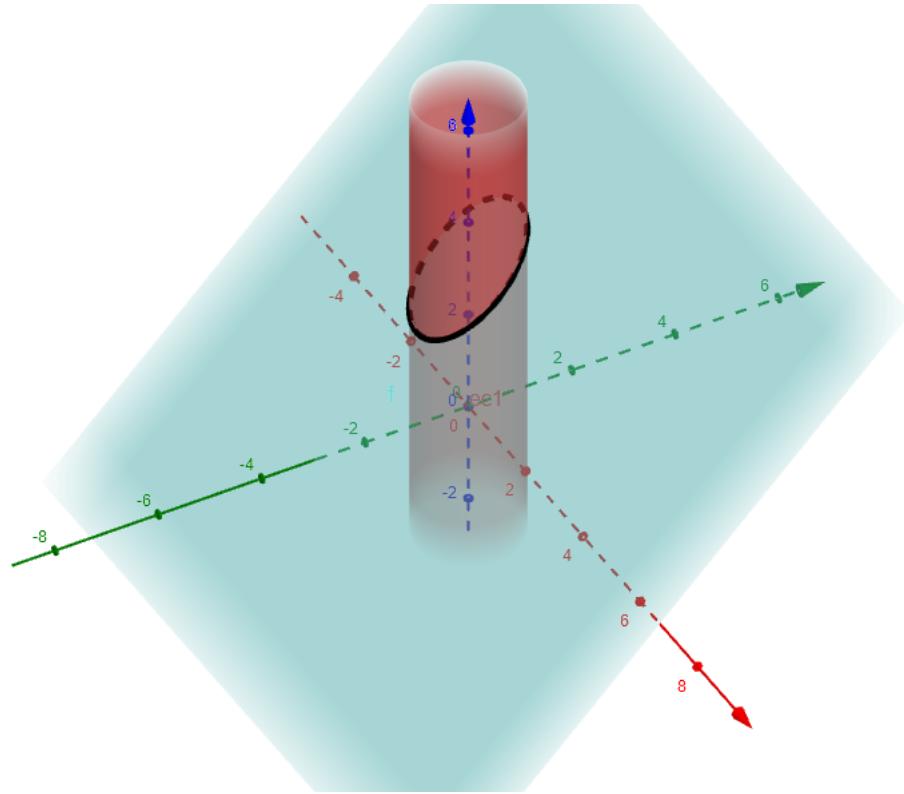
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x) \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx d\theta \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

□

3. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(c) $\iint_S yz d\sigma$, onde S é a parte do plano $z = y+3$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$.

Demonstração. Considere a grafica



Tomando a parametrização

$$\sigma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho \sin \theta + 3), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1$$

Logo para o calculo da integral de superfície precisamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & \rho \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(0) + \vec{j}\rho + \vec{k}(-\rho) \\ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right\| &= \sqrt{2}\rho \end{aligned}$$

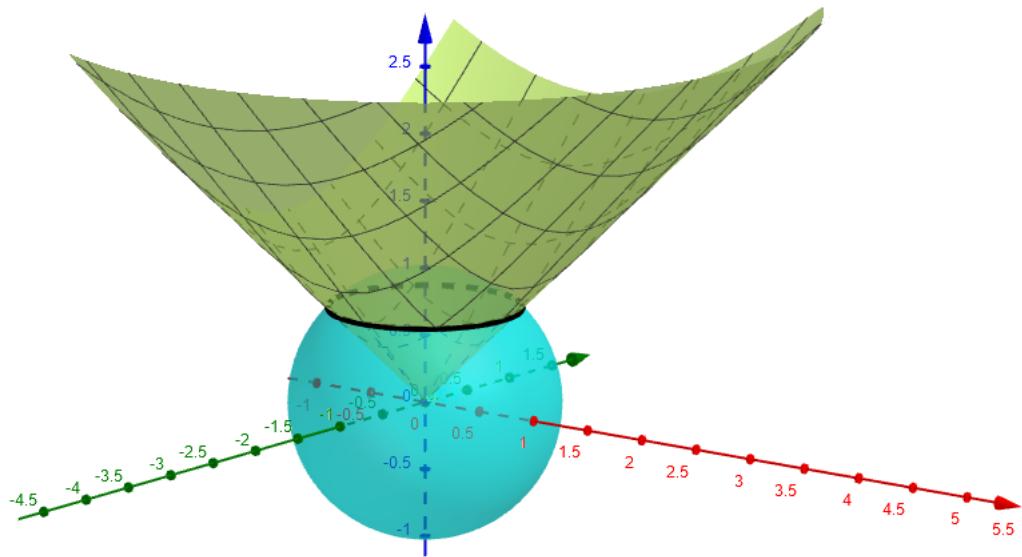
Agora a integral é

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \sin \theta (\rho \sin \theta + 3) \sqrt{2} \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{2} \rho^3 \sin^2 \theta d\rho + \int_0^1 \sqrt{2} \rho^2 \sin \theta 3 d\rho \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{4} \sin^2 \theta d\theta + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 0 \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}
 \end{aligned}$$

□

(f) $\iint_S xyz d\sigma$, onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Demonastração. Vamos considerar o seguinte gráfico



Para a parametrização da esfera de raio 1

$$\sigma(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$$

Note que para $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ temos

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \sqrt{\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi} \\ &= \sin \phi, \\ 1 &= \tan \phi\end{aligned}$$

assim

$$\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq 2\pi$$

Logo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq 2\pi$. Além disso note que para esta parametrização

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \right\| = \sin \phi$$

Logo a integral de superfície é

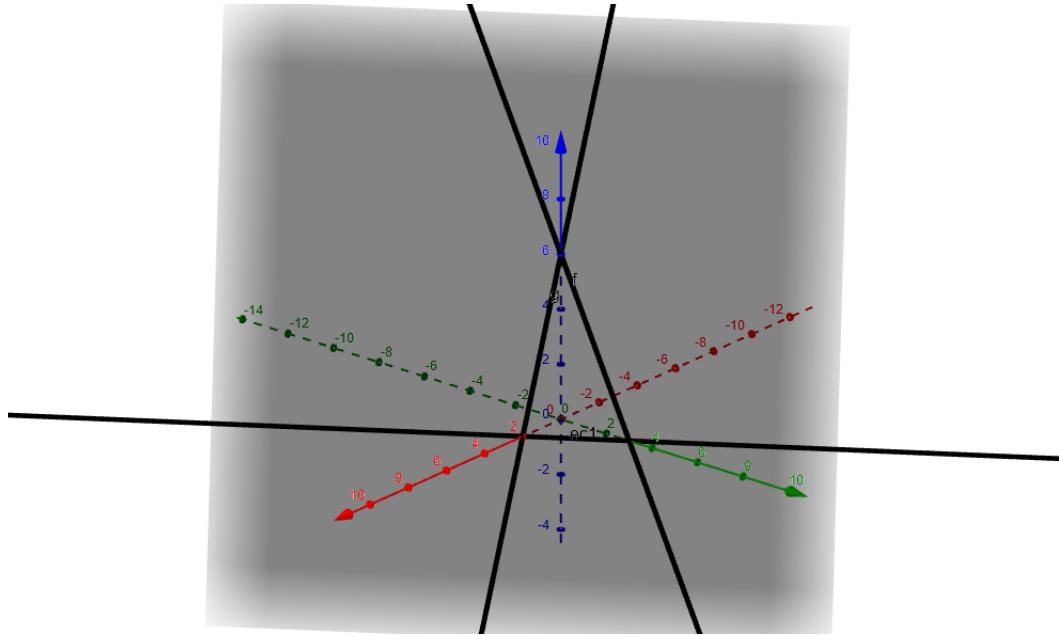
$$\begin{aligned}\iint_S xyz d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \cos \theta \sin \phi \sin \theta \sin \phi \cos \phi \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \sin^3 \phi \cos \phi \cos \theta \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \sin^3 \phi \cos \phi d\phi \right) \\ &= \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) (-) \\ &= 0(-) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

4. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x, y, z)$ é a densidade pontual de massa para:

(a) S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ contida no primeiro octante e $\delta(x, y, z) = y$.

Demonstração. Vamos considerar inicialmente o gráfico do plano



o plano $3x + 2y + z = 6$ intersecta-se com o plano xy na linha

$$3x + 2y + 0 = 6$$

do mesmo jeito com o plano yz na linha

$$3 \cdot 0 + 2y + z = 6$$

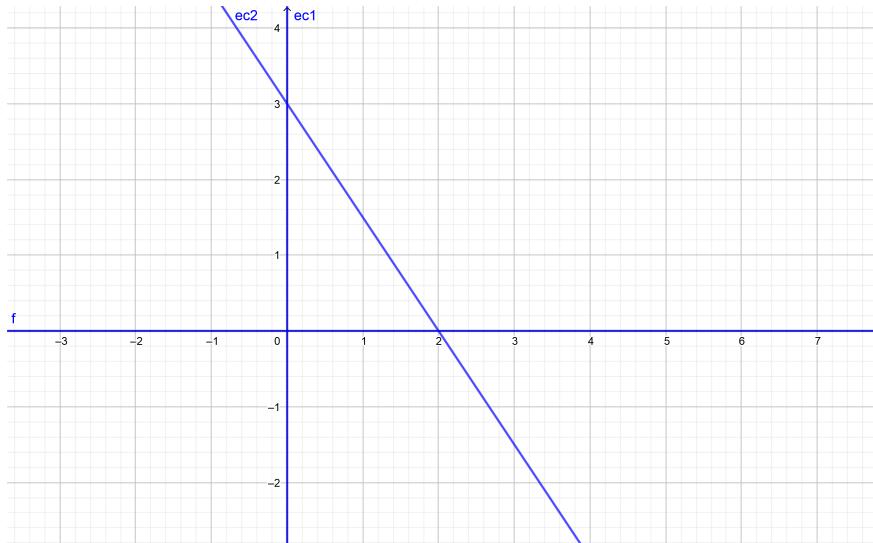
e com o plano zx na linha

$$3x + 2 \cdot 0 + z = 6$$

A superfície em questão de fato é um triângulo. Uma parametrização para esta pode ser

$$\sigma(x, y) = (x, y, 6 - 3x - 2y)$$

onde (x, y) varia na projeção deste triângulo no plano xy , veja esta projeção no seguinte gráfica



assim uma parametrização para esta região pode ser

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \right\}$$

Para o calculo da integral de superfície precisamos de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-3) - \vec{j}(2) + \vec{k}(1) \\ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| &= \sqrt{9 + 4 + 1} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

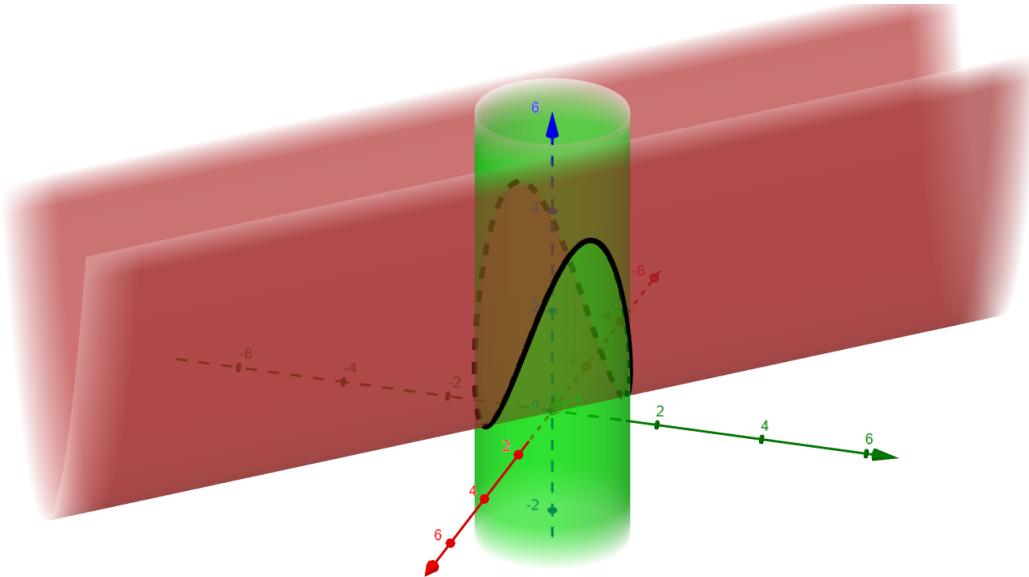
Logo a integral de superfície é

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} y\sqrt{14} dx dy &= \int_0^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} dx \\
&= \int_0^2 \sqrt{14} \frac{(3 - \frac{3}{2}x)^2}{2} dx \\
&= \frac{\sqrt{14}}{2} \left(\frac{-2}{3} \right) \frac{(3 - \frac{3}{2}x)^3}{3} \Big|_0^2 \\
&= 0 + \frac{\sqrt{14}3^3}{9} \\
&= 3\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

□

(d) S é a parte de $z = x^2 + 2xy + y^2$ limitada por $x^2 + y^2 = 2$ e $\delta(x, y, z) = \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt{1+8z}}$

Demonastração. Primeiramente vejamos a seguinte gráfica da superfície S



Uma parametrização para esta superfície é

$$\sigma(x, y) = (x, y, (x + y)^2), \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2(x+y) \\ 0 & 1 & 2(x+y) \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-2(x+y)) - \vec{j}(2(x+y)) + \vec{k}1 \\ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| &= \sqrt{4(x+y)^2 + 4(x+y)^2 + 1} \\ &= \sqrt{1 + 8(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Logo a integral de superfície é

$$\iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 2} \frac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{1 + 8(x+y)^2}} \sqrt{1 + 8(x+y)^2} dx dy = \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 2} 2x^2 + 3y^2 dx dy$$

Para calcular esta ultima integral vamos usar coordenadas polares. Por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 2} 2x^2 + 3y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2(2\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta) + 2\sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 4\rho d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 2\sin^2 \theta \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi 4 \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\sqrt{2}} + \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \left(2 \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\sqrt{2}} \right) \\ &= 8\pi + 2\pi \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

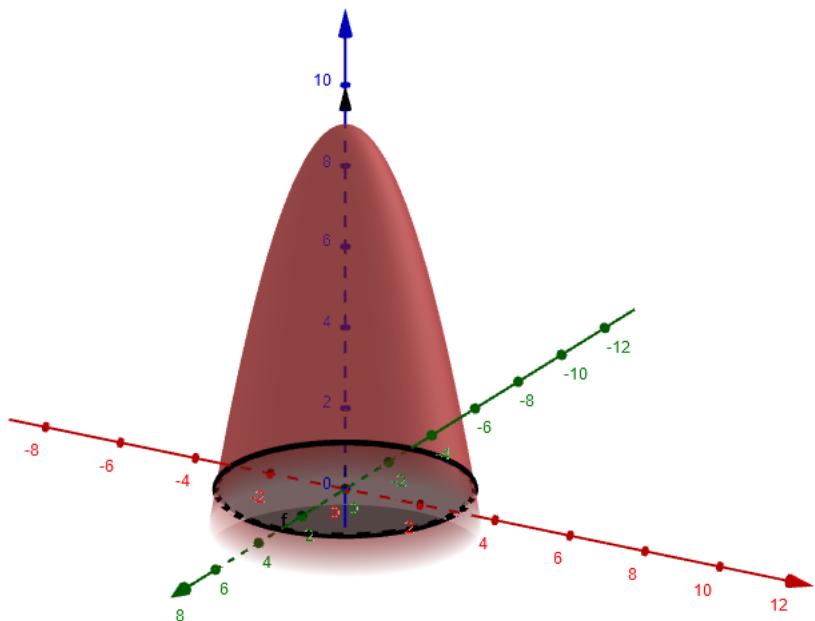
□

5. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma$ para cada um dos campos de vetores \vec{F} e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de \vec{F} através de S . Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada

pela normal exterior.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ com $0 \leq z$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 9)$ é \vec{k}

Demonstração. Vejamos uma gráfica da superfície S



Calculemos o campo de vectores normal unitário \vec{n} a S . Para este consideremos a parametrização

$$\sigma(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2), \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(2x) - \vec{j}(-2y) + \vec{k}(1), \\ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\| &= \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}, \\ \vec{n}(x, y) &= \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}.\end{aligned}$$

Observe que de fato quando $\vec{n}(0, 0, 9) = \vec{k}$. Para o calculo da integral de superfície precisamos também calcular

$$\vec{F}(\sigma(x, y)) \cdot \vec{n}(x, y) = \frac{2x^3y - 6xy^2 + 4y^3}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 9} \frac{2x^3y - 6xy^2 + 4y^3}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \cdot \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dx dy \\ &= \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 9} 2x^3y - 6xy^2 + 4y^3 dx dy.\end{aligned}$$

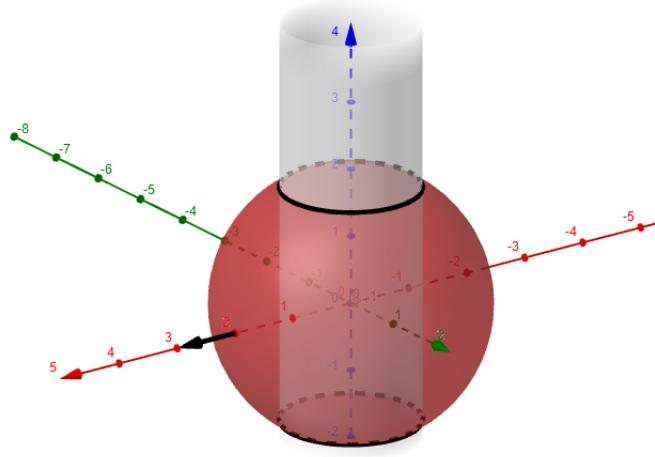
Agora para calcular esta ultima integral vamos usar coordenadas polares

$$\begin{aligned}\iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 9} 2x^3y - 6xy^2 + 4y^3 dx dy &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (2\rho^4 \cos^3 \theta \sin \theta - 6\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta + 4\rho^3 \sin^3 \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^3 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^3 \sin \theta \cos^3 \theta + 4 \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^3 \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2 \cdot 3^6}{6} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta - \frac{6 \cdot 3^5}{5} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta + \frac{4 \cdot 3^5}{5} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

(i) $\vec{F}(x, y, z) = -yz\vec{i}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2, 0, 0)$ é \vec{i}

Demonastração. Consideremos a seguinte gráfica de S



Lembremos que a normal a esfera com centro na origem é

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Note que de fato no ponto $(2, 0, 0)$ temos que $\vec{n} = \vec{i}$. Para $\vec{F}(x, y, z) = -yz\vec{i}$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{-xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Além disso tomando coordenadas esféricas temos que de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$ a componente z fica determinada por

$$z = 2 \cos \phi, 1 + z^2 = 4 \implies \cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim

$$\phi = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}.$$

Logo uma parametrização para S é

$$\sigma(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \sin \phi), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

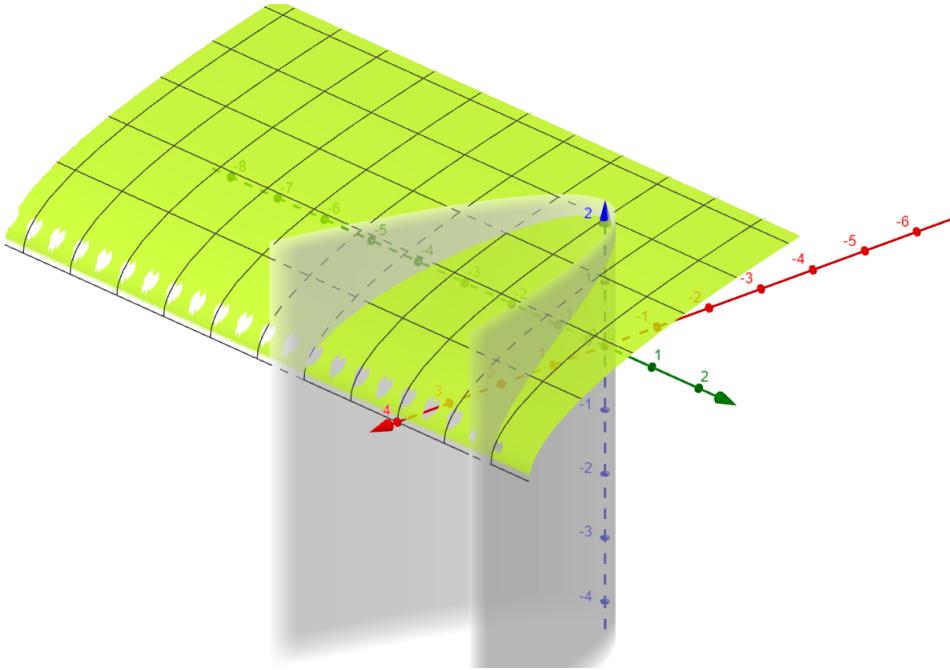
Por tanto a integral de superfície é

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} -\cos \theta \sin \phi \sin \theta \cos \phi \cos \phi \cdot 2 \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \left(-\int_0^{2\pi} 8 \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 \phi \cos \phi d\phi \right) \\ &= \left(-8 \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) (-) \\ &= 0(-) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

(j) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z = \sqrt{4-x}$ limitada pela superfície cilíndrica $y^2 = x$, orientado de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{i} > 0$.

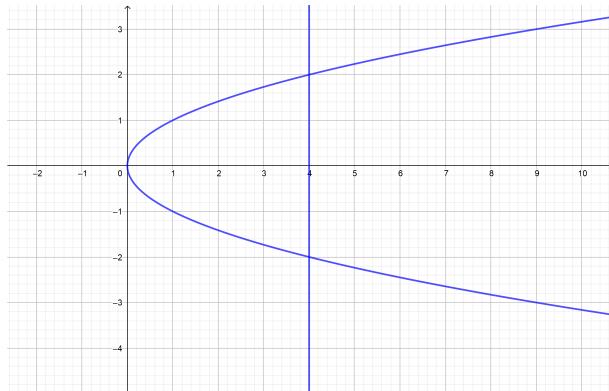
Demonstração. Consideremos uma gráfica para S



Note que uma parametrização para esta superfície é

$$\sigma(x, y, \sqrt{4 - x})$$

onde (x, y) varia na projeção de S no plano xy . Note que $z = \sqrt{4 - x}$ intersecta o plano xy em $x = 2$ e ademais devemos ter $y^2 \leq x$. Considere o gráfico seguinte



logo

$$-2 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4$$

Para calcular a integral de superfície precisamos do campo normal a S

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{4-x}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\left(\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right) - \vec{j}0 + \vec{k}1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-x}}\vec{i} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Observe que $\vec{n} \cdot \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{4-x}} > 0$. Agora vamos calcular a integral de superfície

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{n} &= \frac{y}{\sqrt{4-x}} + x, \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 \frac{y}{\sqrt{4-x}} + x dx dy \\ &= \int_{-2}^2 -2\sqrt{4-x}y \Big|_{y^2}^4 dy + \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^4 dy \\ &= \int_{-2}^2 2\sqrt{4-y^2}y dy + \int_{-2}^2 \frac{4^2}{2} dy - \int_{-2}^2 \frac{y^4}{2} dy \\ &= \frac{4^2 \cdot 4}{2} + \frac{-2(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{-2}^2 - \frac{2^5}{10} - \frac{2^5}{10} \\ &= \frac{320 - 64}{10} \\ &= \frac{120}{5}.\end{aligned}$$

□

6. Calcule

(c) $\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, onde S é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ contida no semiespaço $2y + 1 \leq z$, orientada de modo que sua normal satisfaz $0 \leq \vec{n} \cdot \vec{k}$

Demonstração. Primeiramente lembre a notação: Para $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in K$, e $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ a integral

$$\iint_{\sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

é usada para representar a integral

$$\iint_K \left[P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv$$

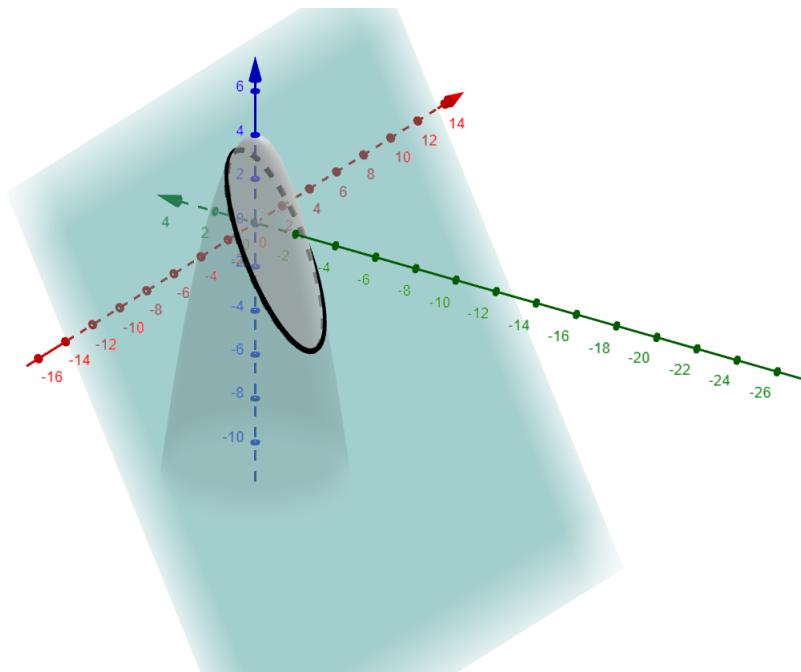
Por tanto, tendo isso claro vamos calcular a integral. Para compreender a superfície vamos calcular a projeção da interseção das superfícies $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 2y + 1$ no plano, logo

$$\begin{aligned} 2y + 1 &= 4 - x^2 - y^2 \\ (y + 1)^2 + x^2 &= 4. \end{aligned}$$

Assim uma parametrização natural para esta superfície é

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \rho) &= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta - 1, 4 - \rho^2 \cos^2 \theta - (\rho \sin \theta - 1)^2), \\ &= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta - 1, 3 - \rho^2 + 2\rho \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2 \end{aligned}$$

Considere o gráfico



Mas lembre que devemos ter que uma parametrização com orientação tal que seu normal satisfaz $0 \leq \vec{n} \cdot \vec{k}$. Para que nossa parametrização satisfaz esta condição devemos inverter a orientação do parâmetro θ (Verifique!). Logo uma parametrização com a orientação certa da superfície é dada por

$$\sigma(\theta, \rho) = (\rho \cos(-\theta), \rho \sin(-\theta) - 1, 3 - \rho^2 + 2\rho \sin(-\theta)), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2.$$

Para o calculo da integral precisamos calcular também

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \rho)} d\theta d\rho = \begin{vmatrix} -\rho \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -2\rho \cos(-\theta) & -2\rho + 2\sin(-\theta) \end{vmatrix} d\theta d\rho \\ &= 2\rho^2 \cos \theta d\theta d\rho \\ dz \wedge dx &= \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \rho)} d\theta d\rho = \begin{vmatrix} -2\rho \cos(-\theta) & -2\rho + 2\sin(-\theta) \\ \rho \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{vmatrix} d\theta d\rho \\ &= (-2\rho - 2\rho^2 \sin(\theta)) d\theta d\rho \\ dx \wedge dy &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} = \begin{vmatrix} \rho \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \\ -\rho \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \end{vmatrix} d\theta d\rho \\ &= \rho d\theta d\rho \end{aligned}$$

Note que $dx \wedge dy$ diz que a parametrização tem a orientação pedida. Agora

$$\begin{aligned} &\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \cos \theta (2\rho^2 \cos \theta) d\rho d\theta + (-\rho \sin \theta - 1)(-2\rho - 2\rho^2 \sin \theta) d\rho d\theta \\ &\quad + (3 - \rho^2 - 2\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2\rho^3 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 4\rho^2 \sin \theta + 5\rho - \rho^3 - 2\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 d\rho d\theta + \left(\frac{4\rho^3}{3} \Big|_0^2 \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) + 2\pi 5 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 \\ &\quad - \left(\frac{2\rho^3}{3} \Big|_0^2 \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) \\ &= 2\pi 2^2 + 0 + 20\pi + 0 \\ &= 28\pi. \end{aligned}$$

□

7. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , orientada de modo que sua normal unitária \vec{N} tenha terceira componente não negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S , mostre que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_D \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy.$$

Demonstração. Como a superfície é o gráfico da uma função temos uma parametrização predileta dada por

$$\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D$$

o vetor normal esta dada também

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \vec{k}1, \\ \vec{F} \cdot \vec{N} &= -P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \end{aligned}$$

Logo integral fica como

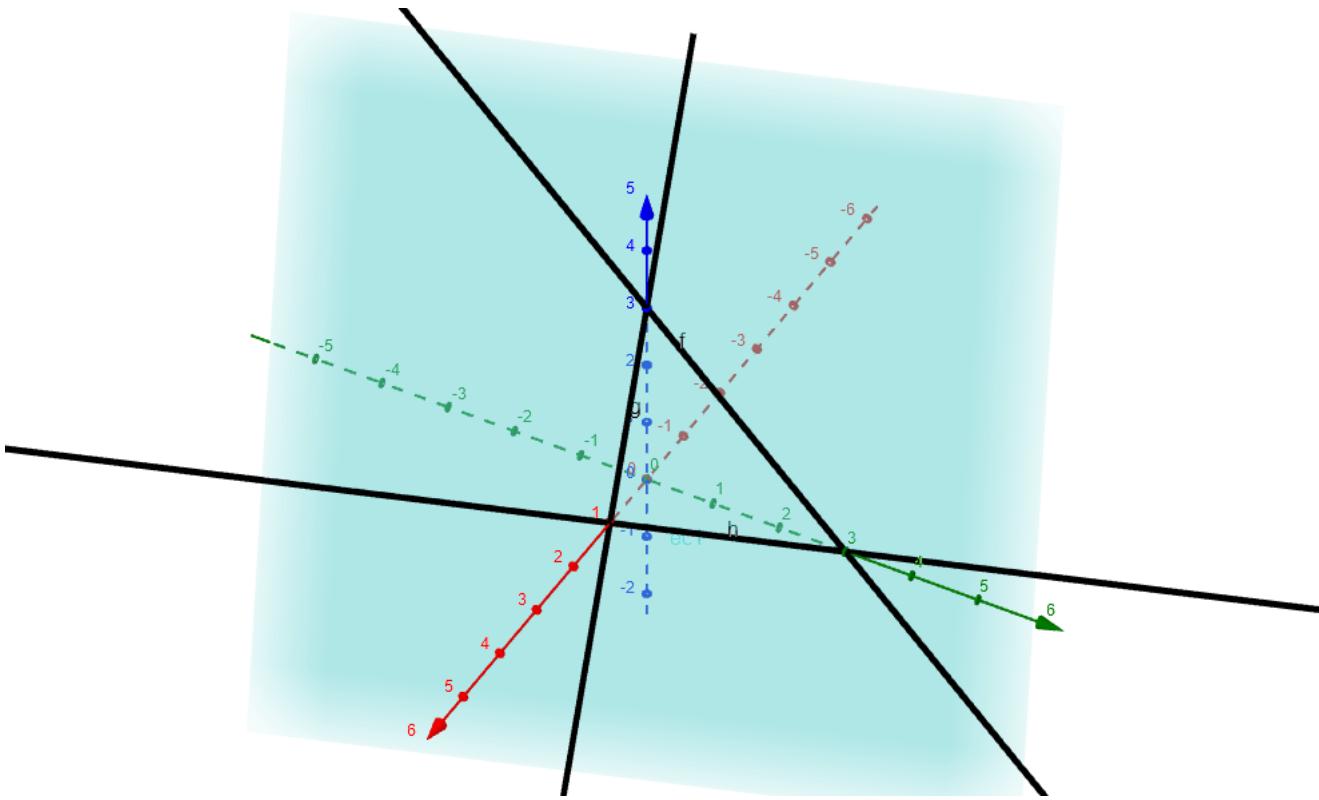
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_D \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy$$

□

10. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xz\vec{k}$ e γ é a parte do plano $3x + y + z = 3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Demonstração. Vamos considerar uma gráfica para o plano com seus respetivos intersectos com os planos xy , yz e zx .



Por o Teorema de Stokes

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

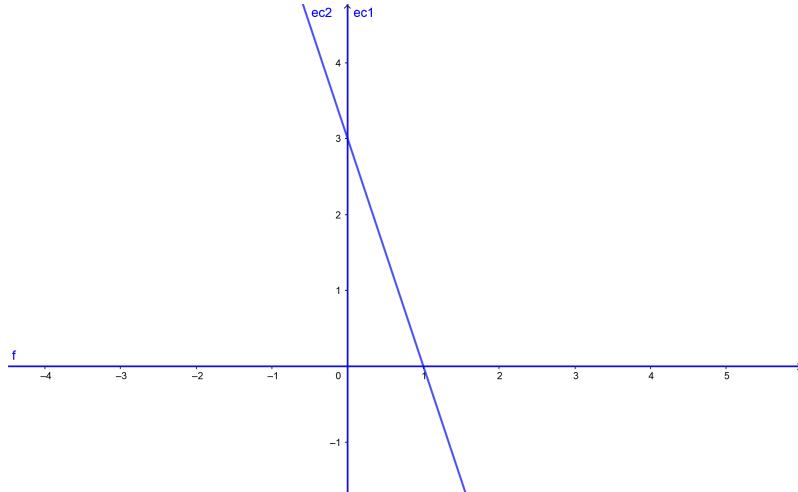
Assim vamos calcular o rotacional de \vec{F} .

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(3x) - \vec{j}(3y - x) + \vec{k}(2y). \end{aligned}$$

Por outro lado o vetor normal do triângulo formado pelo plano no primeiro octante. Para esto tomamos a parametrização do triangulo dado por

$$\sigma(x, y) = (x, y, 3 - 3x - y)$$

Onde (x, y) varia na projeção do triângulo no plano xy , esta determinado pelos eixos x e y e linha reta $3x + y = 3$, como na próxima figura



Por tanto $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3 - 3x$. Agora

$$\vec{n}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}3 + \vec{j} + \vec{k}$$

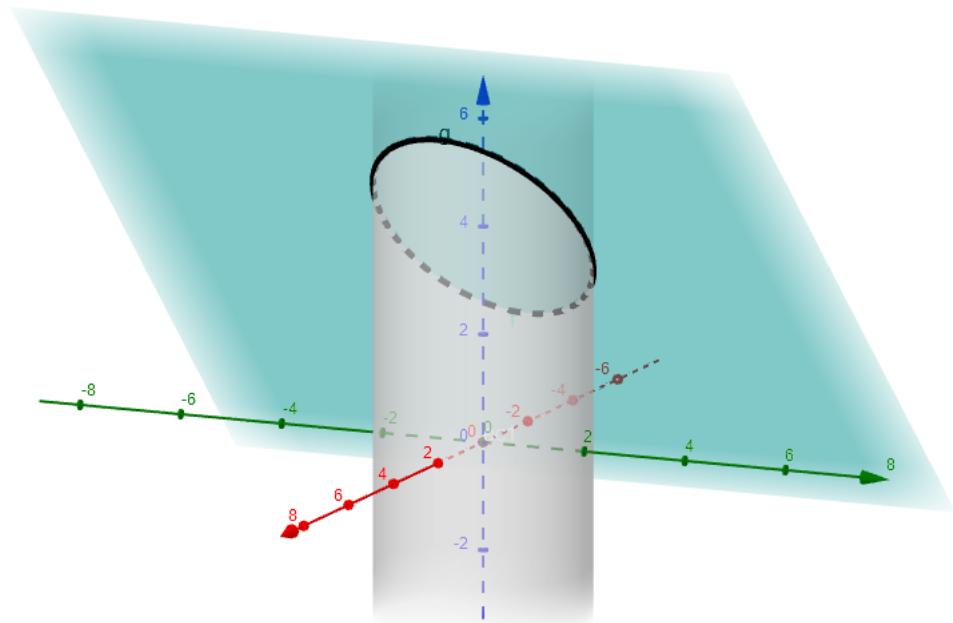
e por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (3x\vec{i} - (3y - x)\vec{j} + 2y\vec{k}) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{3-3x} 10x - y dy dx \\ &= \int_0^1 10x(3 - 3x) - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{3-3x} dx \\ &= \int_0^1 30x - 30x^2 - \frac{(3 - 3x)^2}{2} dx \\ &= 30 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 30 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{12} (3 - 3x)^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{30}{2} - \frac{30}{3} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

□

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (2z + \sin e^{x^3})\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \sin \sin z^2)\vec{k}$ e γ é a interseção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Demonstração. Consideremos a seguinte gráfica para a superfície em questão



□

Vamos calcular a integral de linha usando o Teorema de Stokes, por tanto vamos precisar calcular o rotacional do campo \vec{F} e determinar o vetor normal à superfície

$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{F}) &= \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z + \sin e^{x^3} & y & (5y + \sin \sin z^2) \end{array} \right| \\ &= \vec{i} - \vec{j}2 + \vec{k}4\end{aligned}$$

é fácil ver que o vetor normal ao plano $z = x + 4$ é

$$\vec{n}(x, y, z) = -1\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}$$

Logo

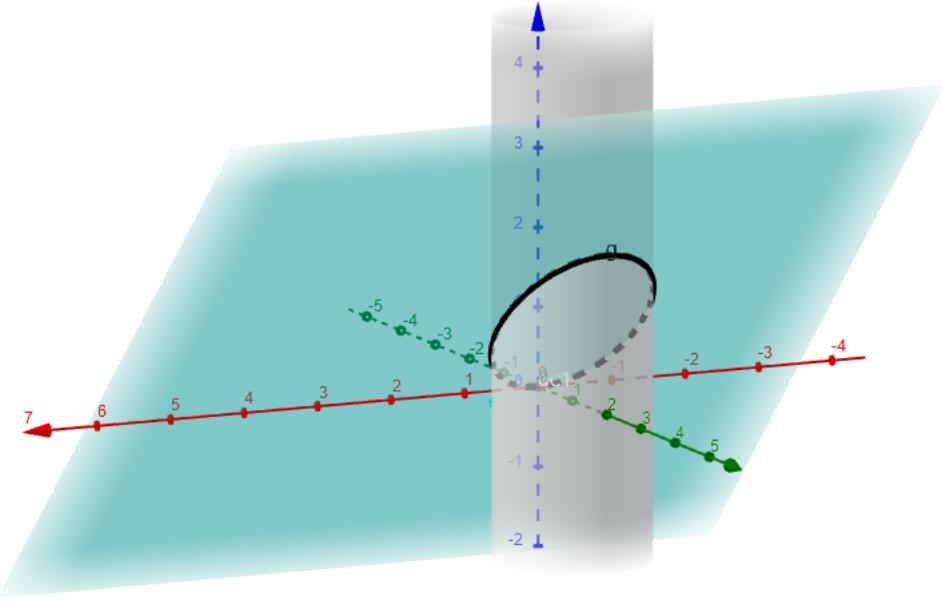
$$\text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} = -1$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -1 \rho d\rho d\theta \\ &= -2\pi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^2 \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (2x + (1 + y^2)^2 0)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Demonstração. Vamos considerar um gráfico para a superfície



de novo para o calculo desta integral de linha vamos usar o Teorema de Stokes, assim precisamos calcular o rotacional do campo e o vetor normal à superfície. Facilmente por calculo direito vamos ver que

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{i} + \vec{k}$$

e dado que a superfície faz parte do plano $z = y$ temos que o vetor normal à superfície é

$$\vec{n}(x, y, z) = -\vec{j} + \vec{k}$$

Logo

$$\text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} = 1$$

e por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 \rho d\rho d\theta \\ &= 2 \frac{\pi}{2} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

□