Gabarito
MAT2352 — Lista 3
Monitor: Juan Sebastián Herrera Carmona

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(b) $\int_\gamma xy^4 ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16, 0 \leqslant x$.

Demonstração. vamos considerar a seguente parametrização para a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16, 0 \leqslant x$,

$$\gamma(t) = (4\cos(t), 4\sin(t)), \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

Logo aplicando a formula

$$\int_\gamma F(x, y, z) ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Assim por um lado temos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (4\cos(t))^2} = \sqrt{16} = 4,$$

por tanto

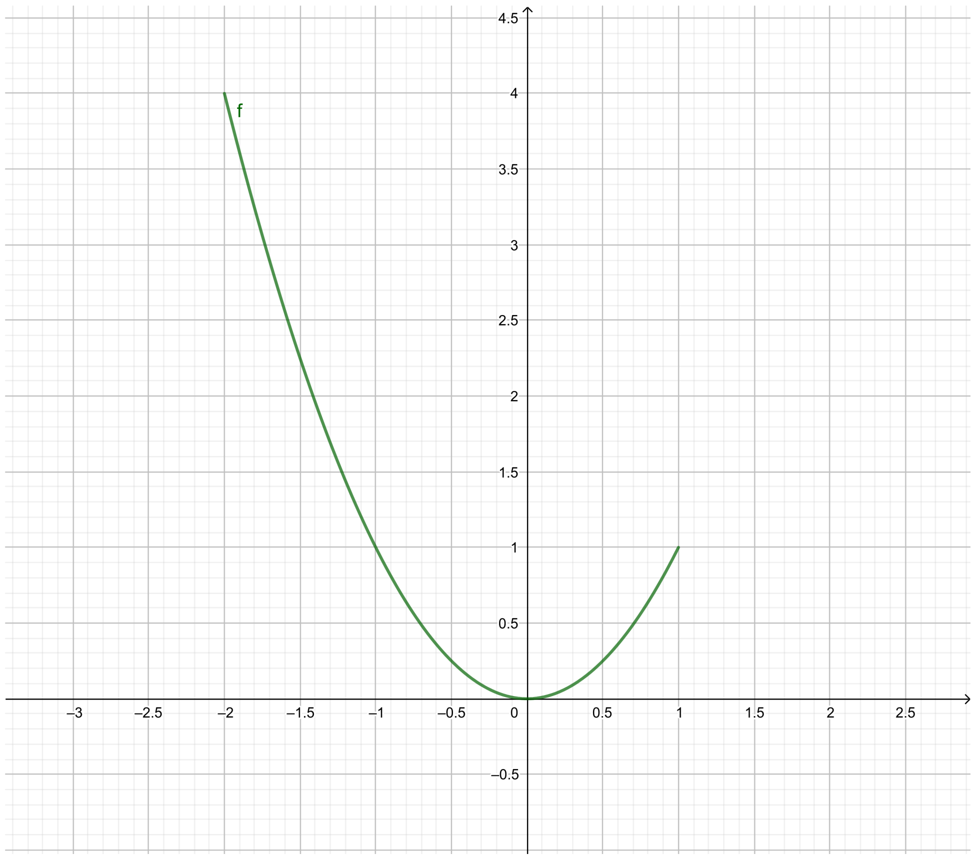
$$\begin{aligned}
\int_\gamma xy^4 ds =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(t) \cdot (4\sin(t))^4 \cdot 4dt \\
=& 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(\sin(t))^4 dt \\
=& 4^6 \left. \frac{\sin t^5}{5} \right|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} \\
=& \frac{4^6}{5}(1+1) \\
=& 1638, 4
\end{aligned}$$

□

(c) $\int_\gamma (x - 2y^2)dy$,γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$.

Demonstração. Vamos considerar a parametrização do arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$ dada por:

$$\gamma(t) = (t, t^2), -2 \leqslant t \leqslant 1,$$



Agora usando a expressão para integral de linha de um campo vetorial $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ sobre uma curva parametrizada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$.

$$\int_\gamma F(x, y) \cdot d\gamma = \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right] dt,$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x-3y^2)dy =& \int_{-2}^{1} (t-2t^4)\cdot 2tdt\\ =&2\int_{-2}^{1} t^2dt - 4\int_{-2}^{1} t^5dt\\ =&2\left.\frac{t^2}{3}\right|_{-2}^{1} - 4\left.\frac{t^6}{6}\right|_{-2}^{1}\\ =&\frac{16}{3}+\frac{2^7}{3}\\ =&48.\end{aligned}$$

□

(e) $\int_\gamma xyzds, \gamma : x = 2y, y = 3\sin t, z = 3\cos t, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Demonstração. O calculo direito da integral é usando a expressão do item anterior, para aplicar esta precisamos

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4+9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_\gamma xyzds =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cdot 3\sin t\cdot 3\cos t\cdot \sqrt{13}dt,\\ =&18\sqrt{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos tdt\end{aligned}$$

Considerando a primitiva auxiliar

$$\boxed{\int t\sin 2tdt = \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t\cos 2t) + c}$$

temos que

$$\begin{aligned}
&=\frac{8\sqrt{13}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t2\sin t\cos t\mathrm{d}t\\
&=\frac{18\sqrt{13}}{2}\,\frac{1}{8}(\sin 2t-2t\cos 2t)\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\\
&=18\sqrt{13}\frac{\pi}{8}\\
&=9\frac{\sqrt{13}}{4}.
\end{aligned}$$

□

2. Calcule o comprimento das curvas

(a) $\gamma(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$, onde $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$.

Demonstração. Para o calculo do comprimento da curva de uma curva parametrizada por $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $a\leqslant t\leqslant b$, usamos a expressão

$$s=\int_\gamma \mathrm{d}s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$

Assim para $\gamma(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$ temos que

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\|&=\sqrt{(a-a\cos(t))^2+(a\sin(t))^2}\\
&=\sqrt{2a^2-2a^2\cos(t)}\\
&=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos(t)},
\end{aligned}$$

Logo

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos(t)}\mathrm{d}t$$

usando a primitiva auxiliar para a função $f(t)=\sqrt{1-\cos t}$ para $0\leqslant t<\pi$ e $\pi<t\leqslant 2\pi$.

$$\boxed{\int\sqrt{1-\mathbf{cos}t}\mathrm{d}t=-2\sqrt{1-\cos t}\cot\frac{t}{2}+c}$$

Note que um no ponto $t = \pi$ a "primitiva"não tem boa definição. Por tanto

$$\begin{aligned}
s =& \int_0^{\pi} \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos(t)}dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos(t)}dt \\
=& \sqrt{2}a \left(-2\sqrt{1-\cos t}\cot \frac{t}{2}\Bigg|_{t=0}^{t=\pi} + -2\sqrt{1-\cos t}\cot \frac{t}{2}\Bigg|_{t=\pi}^{t=2\pi} \right) \\
=& \sqrt{2}a(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}) \\
=& 8a.
\end{aligned}$$

□

3. Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \leqslant t \leqslant 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$.

Demonstração. Para calcular a massa do arama vamos usar a formula

$$M = \int_{\gamma} \delta(x, y, z)ds = \int_a^b \delta(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

Assim por um lado temos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{4+8t^2},$$

e por outro que

$$\begin{aligned}
M =& \int_0^1 2t \cdot \sqrt{4+8t^2}dt \\
=& \frac{1}{12}\sqrt{(4+8t^2)^3}\Bigg|_{t=0}^{t=1} \\
=& \frac{1}{12}(\sqrt{12^3} - 2^3) \\
=& 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

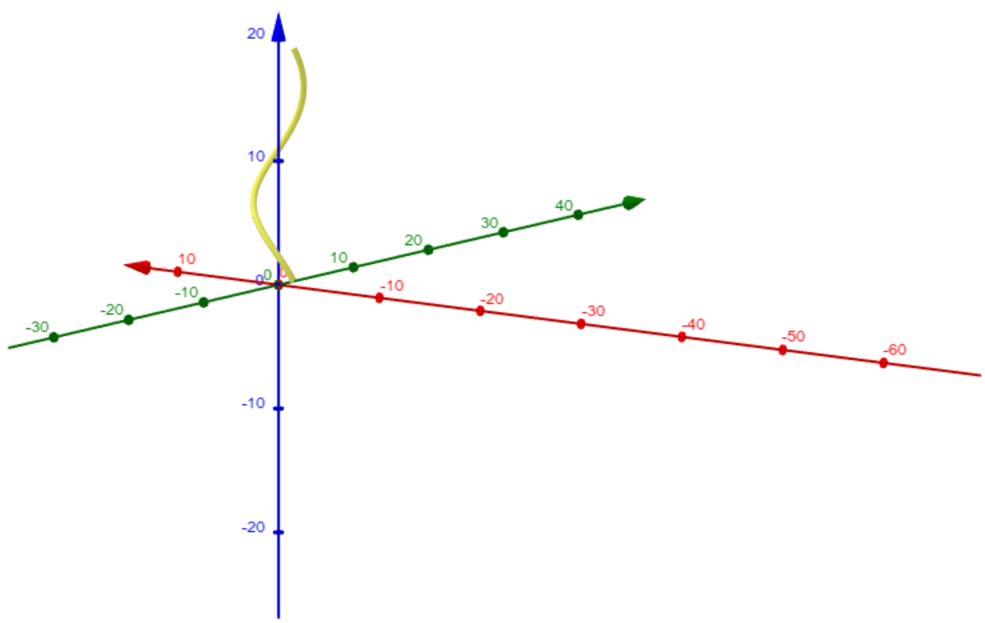
Observe que temos usado a primitiva auxiliar

$$\boxed{\int 16t \cdot \sqrt{4+8t^2}dt = \frac{2}{3}\sqrt{(4+8t^2)^3} + c.}$$

□

3. (c) Determine a massa e o centro de massa de um fio no espaço com o formato da hélice $x = 2\sin t, y = 2\cos t, z = 3t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade é uma constante k.

Demonstração. Considere o gráfico do fio em amarelo



Para calcula a massa precisamos de

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 9} == \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Logo

$$M = \int_\gamma \delta(x,y,z)ds = \int_0^{2\pi} k\|\gamma'(t)\|dt = 2\pi k\sqrt{13}.$$

Para o calculo das coordenadas do centro de massa usamos as formulas

$$x_c = \frac{\int_\gamma x dm}{\int_\gamma dm}, \quad y_c = \frac{\int_\gamma y dm}{\int_\gamma dm}, \quad z_c = \frac{\int_\gamma z dm}{\int_\gamma dm},$$

logo como $\int_\gamma dm$ é de fato massa do fio que já temos calculado,e além disso temos que

$$\int_\gamma x dm = \int_\gamma x(t)\delta(x(t), y(t), z(t)\|\gamma'(t)\|dt$$

então

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} 2\sin(t) \cdot k\sqrt{13}dt}{2\pi k\sqrt{3}} = \frac{-\cos(t)|_{t=0}^{t=2\pi}}{\pi} = 0$$

$$y_c = \frac{\int_0^{2\pi} 2\cos(t) \cdot k\sqrt{13}dt}{2\pi k\sqrt{3}} = \frac{2\ \sin(t)|_{t=0}^{t=2\pi}}{\pi} = 0$$

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} k\sqrt{13} \cdot 3tdt}{2\pi k\sqrt{13}} = \frac{3\int_0^{2\pi} tdt}{2\pi} = \frac{3\ t^2|_0^{2\pi}}{4\pi} = 3\pi.$$

Por tanto as coordenadas do centro de massa é

$$(x_c, y_c, z_c) = (0, 0, 3\pi).$$

$\square$

4. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{\imath} - 7yz\vec{\jmath} + 2xz^2\vec{k}$ e a curva

(b) γ é composto dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois $(1, 1, 1)$.

Demonstração. Note que o primeiro tramo da curva pode ser parametrizado por

$$\gamma_1(t) = (t, 0, 0), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

e o segundo poder ser parametriza pela expressão vetorial de uma reta que une dois pontos,i.e.,

$$\gamma_2(t) = (1, 0, 0) + t((1, 1, 1) - (1, 1, 0)) = (1, 1, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

Logo a integral é

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} =& \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}\\ =& \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 2t^2 dt\\ =& \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\\ =& 1.\end{aligned}$$

□

5. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

(b) $\vec{F}(x,y,z) = 2(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário.

Demonstração. Lembremos que a expressão para integral de linha de um campo vetorial $F(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ sobre uma curva parametrizada $\gamma(t) = (x(t), y(t)), a \leqslant t \leqslant b$ é

$$\int_\gamma F(x,y)\cdot d\gamma = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right] dt,$$

Além a parametrização natural da elipse é

$$\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

onde

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t,$$

assim,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} =& \int_0 2\pi(2(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t)) + ((a\cos t b\sin t)b\cos t)dt\\ =& \int_0^{2\pi} (-2a^2 - b^2)\cos t\sin t dt + \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t - 2\sin^2 t)dt\\ =& (-2a^2 - b^2)\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_{t=0}^{t=2\pi} + ab\left.\frac{1}{2}(3\sin t\cos t - t)\right|_{t=0}^{t=2\pi}\\ =& 0 + -\pi ab\\ =& -\pi ab.\end{aligned}$$

Observe que temos usado a primitiva auxiliar

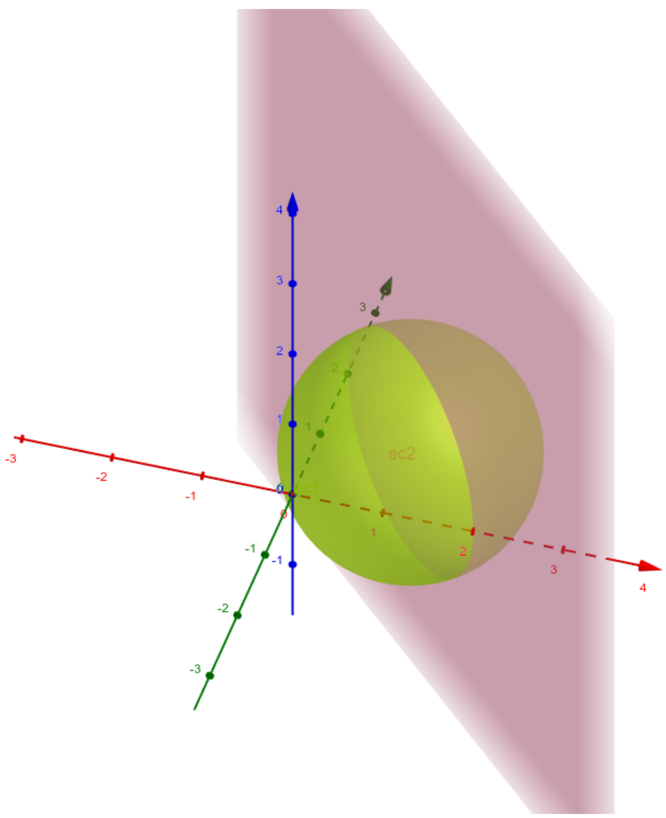
$$\boxed{\int \cos^2 t - 2\sin^2 t dt = \frac{1}{2}(3\sin t \cos t - t) + c.}$$

□

6. Calcule

(c) $\int_\gamma y dx + z dy + x dz$, sendo γ a interseção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário.

Demonstração. Considere o gráfico



Agora achemos a interseção: dado que $x + y = 2$ temos que $y = 2 - x$, logo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 =& 2(x + y) \\ x^2 + (2 - x)^2 + z^2 =& 2 \cdot 2 \\ (x - 1)^2 + \frac{z^2}{2} =& 1, \end{aligned}$$

assim a interseção é

$$y = 2 - x, \quad (x - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Note que uma parametrização para a projeção no plano Oxz com orientazão horaria é

$$x(t) = 1 + \cos t, \quad y(t) = -\sqrt{2} \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

por tanto

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 2 - (1 + \cos t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

e a integral fica

$$\begin{aligned} \int_\gamma y dx + z dy + x dz =& \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin t dt + \int_0^{2\pi} -\sqrt{2} \sin t \sin t dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)(-\sqrt{2} \cos t) dt \\ =& \int_0^{2\pi} \sin t dt - \int_0^{2\pi} - \cos t \sin t dt \\ &+ \int_0^{2\pi} -\sqrt{2} \sin^2 t dt + -\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos t dt - \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ =& - 2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$\square$

(d) $\int_\gamma x dx + (y + x) dy + z dz$, sendo γ a interseção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário.

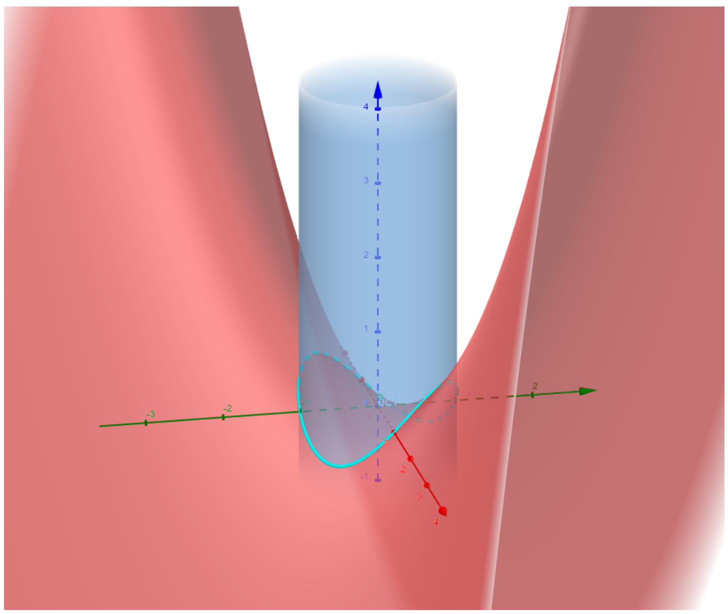
Demonstração. A para metrização no sentido horário para a projeção esta dada por

$$x(t) = \cos t, y(t) = -\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

por tanto a parametrização da interseção das superfícies é

$$\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, -\cos t \sin t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

observe a gráfica seguente



Logo a integral de linha fica como:

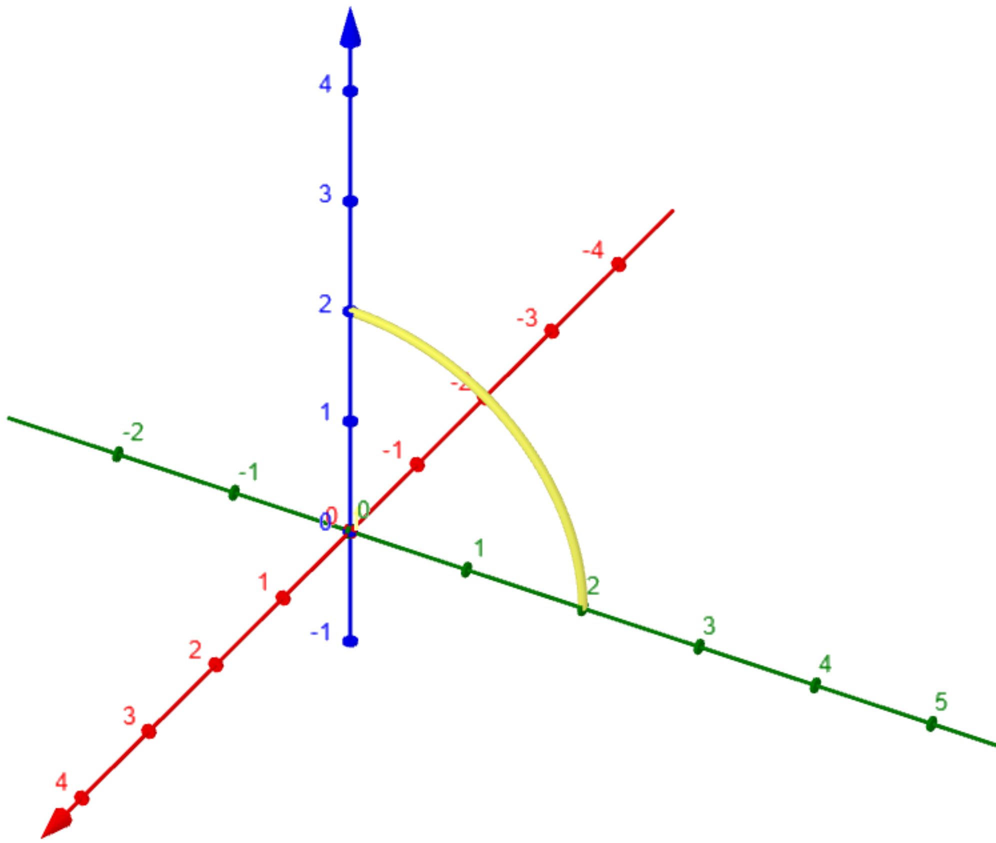
$$\begin{aligned}
\int_\gamma x dx + (y + x) dy + z dz =& \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\
&+ \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^3 t dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin^3 t dt \\
=& 0 - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^3 t dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin^3 t dt \\
=& -\pi + 0 + 0 \\
=& -\pi.
\end{aligned}$$

□

7. Calcule

(a) $\int_\gamma 2x\,dx + (z^2 - \frac{y^2}{2})\,dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0, y^2 + z^2 = 4$, de $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$.

Demonstração. Condiremos a seguente grafia da curva pedida



esta curva pode ser parametrizada em sentido anti-horário em relaxão ao plano

Oyz por

$$\gamma(t) = (0, \sqrt{4-t^2}, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2,$$

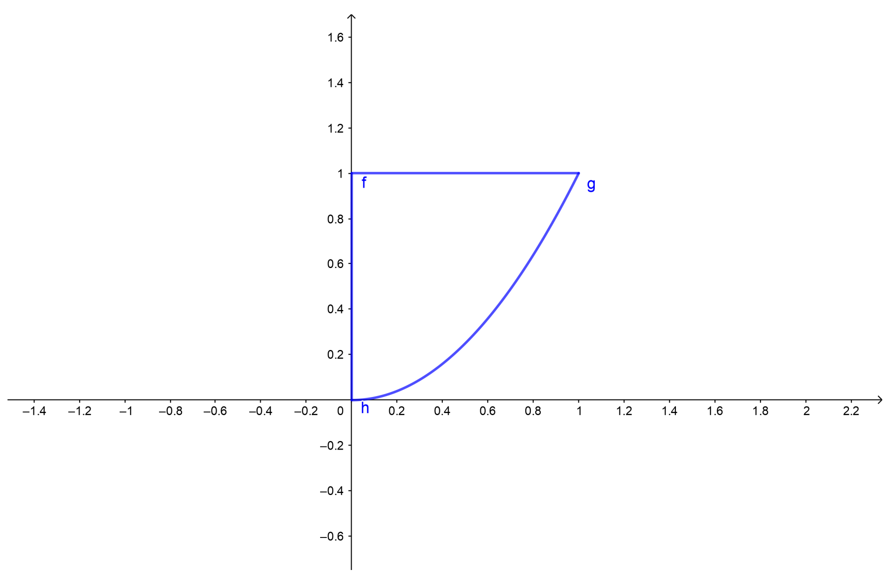
logo a integral fica como:

$$\begin{aligned}\int_\gamma 2x dx + (z^2 - \frac{y^2}{2}) dz =& \int_0^2 2 \cdot 0 d0 + \int_0^2 (t^2 - \frac{(\sqrt{4-t^2})^2}{2}) dt \\ =& 0 + \int_0^2 (-2 + \frac{3t^2}{2}) dt \\ =& -2 \cdot 2 + \frac{t^3}{2}\Big|_{t=0}^{t=2} \\ =& -4 + 4 \\ =& 0.\end{aligned}$$

□

(c) $\int_\gamma \sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0, y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário.

Demonstração. Vamos considerar primeiro a seguente gráfica



Note que a fronteira de esta região somente conseguimos parametrizar por uma curva suave a pedaços, para esto temos 3 tramos que podem ser parametrizados do seguente jeito, lembre que nossas parametrizações devem ficar orientadas no sentido horário.

$$\begin{aligned}
f(t) &= (t, 1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\
g(t) &= ((1-t), (1-t)^2), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\
h(t) &= (0, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Logo a curva que parametriza a fronteira de nossa região é a concatenação das curvas h, f e g,

$$\gamma = h * f * g.$$

Assim a integral é

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy = & \int_h \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy + \int_f \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy \int_g \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy \\
= & \left(\int_0^1 \sqrt{t}d0 + \sqrt{0}dt\right) + \left(\int_0^1 \sqrt{1}dt + \sqrt{t}d1\right) \\
& + \left(\int_0^1 \sqrt{(1-t)^2}dt + \int_0^1 \sqrt{1-t}d(1-t)^2\right) \\
= & 1 + (-1) + \left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right) + \int_0^1 2(1-t)^{\frac{3}{2}}dt \\
= & \frac{1}{2} + 2\left.\frac{(1-t)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 \\
= & \frac{1}{2} - \frac{8}{5} \\
= & -\frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

□

8. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y)0x\vec{i} + (y+2)\vec{j}$ ao mover uma partícula ao longo da ciclóide $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Demonstração. Lembremos que o trabalho calcula-se como a integral de linha:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t),$$

para $\gamma(t)$ definida em $a \leqslant t \leqslant b$. Assim para que calcular a integral de linha precisamos conhecer $\vec{F}(\gamma(t)), d\vec{\gamma}(t), \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t)$, por tanto

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x,y) =& x\vec{i} + (y+2)\vec{j},\\
\vec{\gamma}(t) =& (t-\sin t)\vec{i} + (1-\cos t)\vec{j},\\
\vec{F}(\gamma(t)) =& (t-\sin t)\vec{i} + (1-\cos t+2)\vec{j},\\
d\vec{\gamma}(t) =& (1-\cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j},\\
\vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t) =& (t-\sin t)(1-\cos t)dt + (3+\cos t)\sin t dt.
\end{aligned}$$

Logo nossa integral fica como

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\vec{\gamma}(t) &= \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)dt + (3+\cos t)\sin t dt\\
&= \int_0^{2\pi} (t - t\cos t + 2\sin t + 2\sin t\cos t)dt.
\end{aligned}$$

Considerando as primitivas auxiliares

$$\boxed{\int t\cos t dt = t\sin t + \cos t + c, \quad \int 2\sin t\cos t dt = -\frac{\cos(2t)}{2} + c.}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t) =& \int_0^{2\pi} (t - t\cos t + 2\sin t + 2\sin t\cos t)dt\\
=& \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi} - \left.(t\sin t + \cos t)\right|_{t=0}^{t=2\pi} + \left.\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\right|_{t=0}^{t=2\pi}\\
=& \frac{4\pi^2}{2} + (1-1) + (-2-(-2))\\
=& 2\pi^2.
\end{aligned}$$

$\square$

9. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:
(b)$\oint_\gamma (x+2y)dx + (x-2y)dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$ orientada positivamente.

Demonstração. Lembremos que el Teorema de Green diz que: se $K \subseteq \mathbb{R}^2$ é um conjunto compacto, com interior não vazio, cuja fronteira é imagem de uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, fechado, simples, C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K. Nestas condiçoes

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx dy.$$

□

Logo para aplicar este teorema precisamos conhecer

$$\begin{aligned} P(x, y) =& x + 2y, \\ Q(x, y) =& x - 2y, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} =& \frac{\partial (x - 2y)}{\partial x} = 1, \\ \frac{\partial P}{\partial y} =& \frac{\partial (x + 2y)}{\partial y} = 2, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =& 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

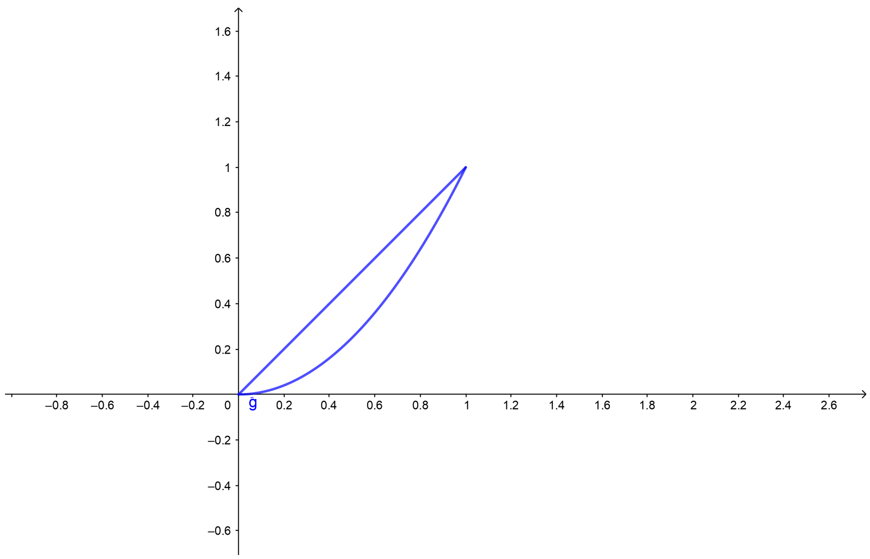
Assim temos que

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_K dx dy.$$

A região limitada pero curva descrita é

$$K = \left\{(x, y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant x\right\}.$$

Considere o seguente gráfico



por tanto

$$
\begin{aligned}
\iint_K dxdy =& -\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx = -\int_0^1 x - x^2 dx \\
=& -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
=& -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

(h) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$ onde $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2 y)\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(2, 0)$.

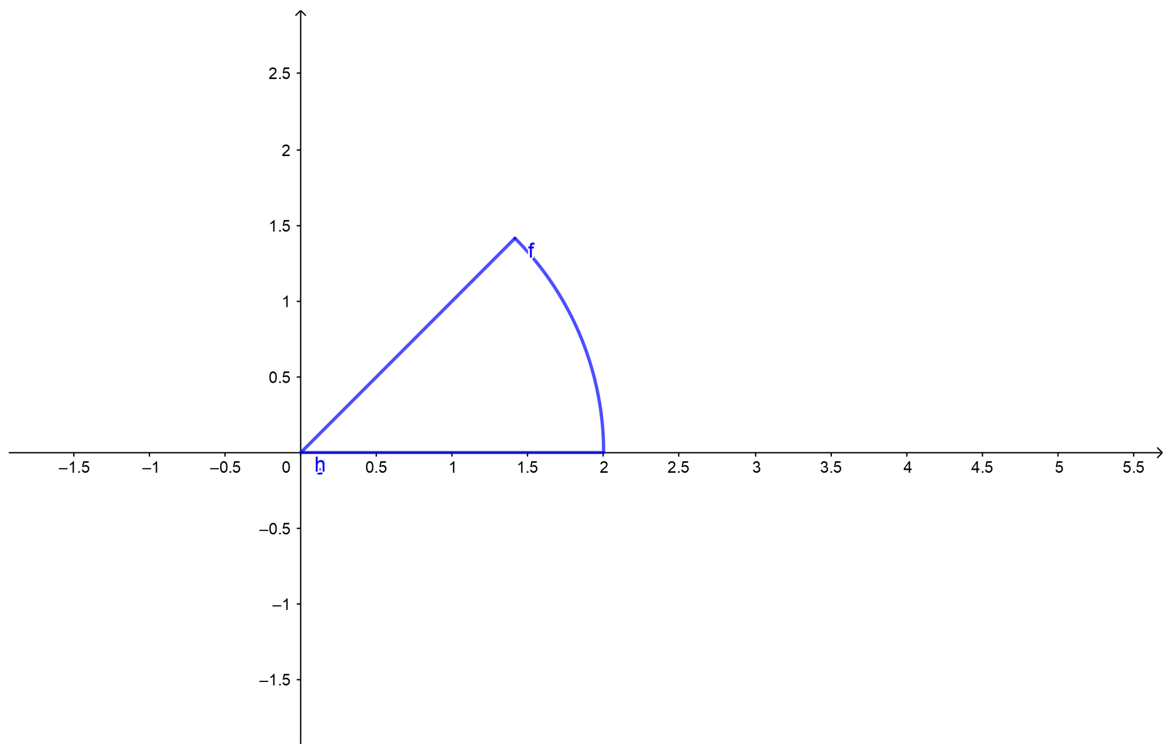
Demonstração. Para aplicar o Teorema de Green precisamos conhecer

$$
\begin{aligned}
P(x, y) =& y^2 - x^2 y \\
Q(x, y) =& xy^2, \\
\frac{\partial Q}{\partial x} =& \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = y^2, \\
\frac{\partial P}{\partial y} =& \frac{\partial(y^2 - x^2 y)}{\partial y} = 2y - x^2, \\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =& y^2 - 2y + x^2,
\end{aligned}
$$

Logo

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \iint_{K} y^2 - 2y + x^2 dx dy$$

Além da região com fronteira γ, para esto consideremos a seguente gráfica



Para calcular a integral dupla vamos usar coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin\theta$$

notemos que a região

$$R = \left\{ (r, \theta) \,|\, 0 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \right\}$$

é mapeada para a região K, assim aplicando o teorema de mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned}\iint_K y^2-2y+x^2dxdy =& \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 (r^2-2r\sin\theta)rdrd\theta\\ =& \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 - 2\ \frac{r^2}{2}\Big|_0^2 \sin\theta\right)d\theta\\ =& 2^2\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{16}{3}\sin\theta d d\theta\\ =& \pi+\frac{16}{3}\cos\theta|_0^{\frac{\pi}{4}}\\ =& \pi+\frac{16}{3}(\frac{1}{\sqrt{2}}-1).\end{aligned}$$

□

12. (a) Calcule $\nabla\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ e $\nabla\operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$.
Lembremos que

$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

Agora

$$\nabla\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \left(\frac{\partial\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}{\partial x}, \frac{\partial\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}{\partial y}\right)$$

Para calcular $\frac{\partial\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}{\partial x}$ vamos usar a regra da cadeia $(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x))$, logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}{\partial x} =& \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y}\\ =& \frac{\frac{1}{y}}{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}{\partial y} =& \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{-x}{y^2}\\ =& \frac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Logo temos que

$$\nabla \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

De jeito similar vamos ter

$$\nabla \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(b) mostre que se $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $\vec{F} = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$, então $\vec{F}$ é conservativo.

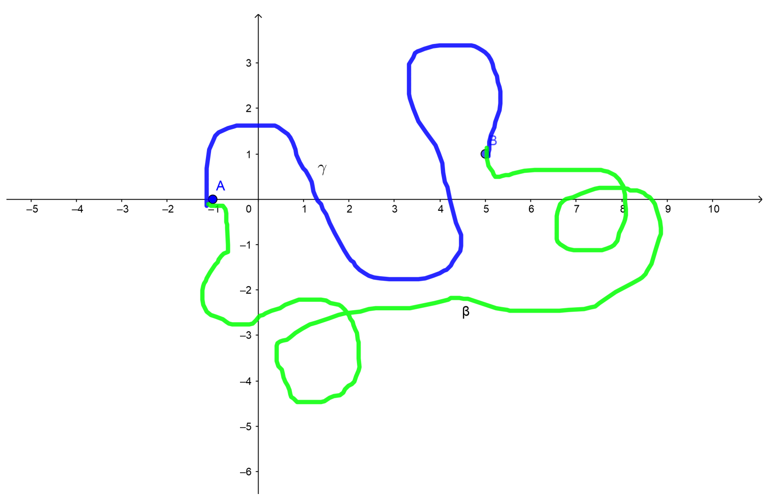
Demonstração. Dica: considere a função

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x,y,z) = \int_0^x f_1(t)dt + \int_0^y f_2(t)dt + \int_0^z f_3(t)dt + c,$$

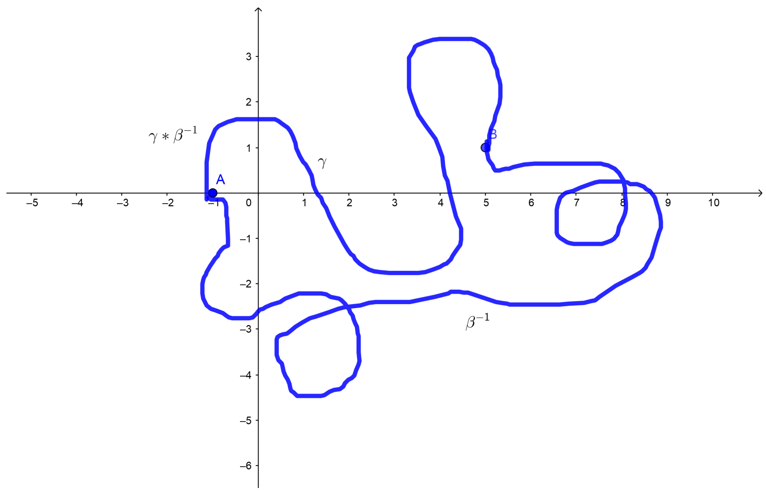
donde c é uma constante. □

14. Verifique que a integral $\int_\gamma 2x \sin y\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)dy$, onde γ é uma curva ligando $(-1,0)$ a $(5,1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor.

Demonstração. Dica: para ver a independença de curva note que dadas duas curvas γ e β ligando $(-1,0)$ e $(5,1)$ (por exemplo como em la figura)



podemos construir um caminho fechado em $(-1,0)$, invertendo a orientação de um dos caminhos e concatenado-lo com o outro (por exemplo como em la figura)



□

Logo podemos dividir este caminho fechado em pequenos caminhos fechados simples e aplicar o Teorema de Green para cada um deles. Aplicando o Teorema de Green vamos notar que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} - \int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{\beta} &= \int_{\gamma * \beta^{-1}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} * \vec{\beta}^{-1} \\ &= \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy\end{aligned}$$

onde K é a região limitada pela curva $\gamma * \beta^{-1}$. Logo fazendo o calculo de

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =& \frac{\partial(x^2 \cos y - 3y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2x \sin y)}{\partial y} \\ =& 2x \cos y - 2x \cos y \\ =& 0\end{aligned}$$

Por tanto vamos ter que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} - \int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{\beta} = 0,$$

isso é por tanto que o valor da integral não depende da escolha da curva tomada para unir os pontos $(-1, 0)$ e $(5, 1)$, pois calcular sua integral por qualquer deles vai dar o mesmo valor

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{\beta}.$$