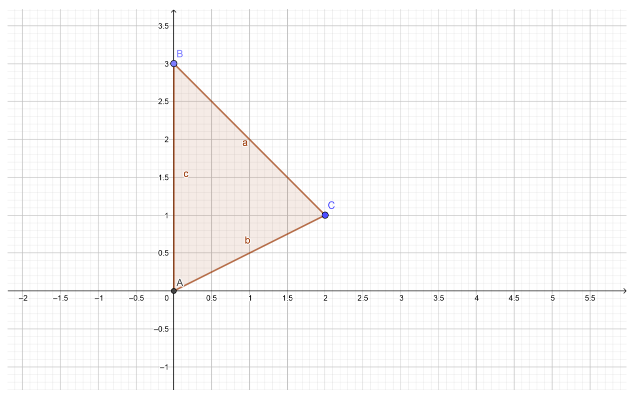
Gabarito

MAT2352 — Lista 2

Monitor: Juan Sebastián Herrera Carmona

1.(b) D é o triângulo de vértices $(0,0), (2,1), (0,3)$ e $\delta(x,y) = x + y$.

Demonstração. Considere a seguente figura do triângulo com os vrtices dados



Podemos descrever o triângulo como

$$D = \left\{ (x,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2, \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 3 - x \right\}$$

Recordemos que a massa é a integral da função de densidade sobre o triângulo, assim

$$\begin{aligned}
Massa =& \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x + y dy dx \\
=& \int_0^2 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=3-x} dx \\
=& \int_0^2 x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} dx \\
=& \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{(x-3)^2}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{29}\Big|_{x=0}^{x=2} \\
=& 6
\end{aligned}$$

Para o calculo do centro de massa calculemos primeiramente as seguentes integrais

$$\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x(x+y)dydx = \frac{9}{2}, \quad \int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} y(x+y)dydx = 9$$

Logo o centro de massa é tem coordenadas

$$x_c = \frac{\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x(x+y)dydx}{\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x+ydydx} = \frac{\frac{9}{2}}{6} = \frac{3}{4}$$

$$y_c = \frac{\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} y(x+y)dydx}{\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x+ydydx} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

assim

$$\text{Centro de Massa} = (\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$$

□

1.(d) D é a região limitada pela parbola $y^2 = x$ e a reta $y - x = 2$ e $\delta(x,y) = 3$.

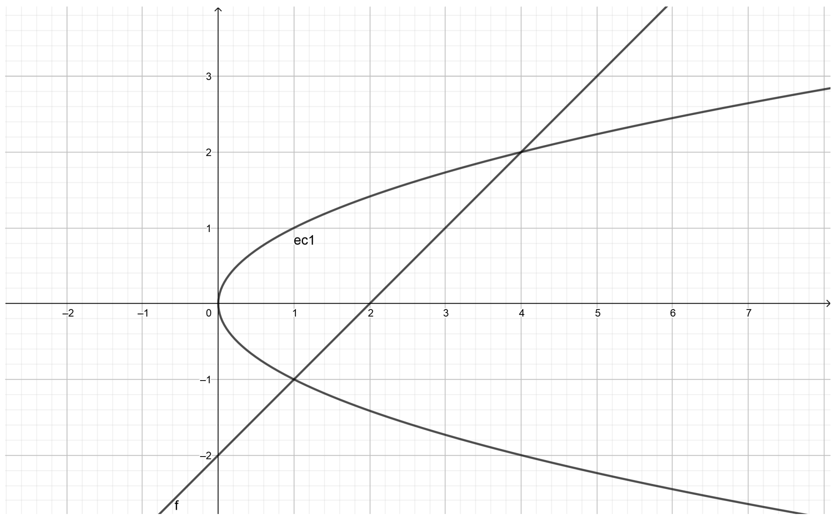
Demonstração. Para determinar a região de integração primeiro achamos os intersetos entre a parbola $x_1(y) = y^2$ e a reta $x_2(y) = y + 2$, para isso note que

$$\begin{aligned} x_1(y) =& x_2(y) \\ y^2 =& y+2 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Implica $y = 2, y = -1$. Logo a região de integraçã o esta dada por

$$D = \{(x,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1, y^2 \leqslant x \leqslant y+2\}$$

como en la figura



$\square$

logo a massa esta dada por

$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} 3dxdy = \frac{27}{2}$$

Para as coordenadas do centro de massa, calculemos as seguentes integrais

$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} x\cdot 3dxdy = \frac{108}{5}$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} y\cdot 3dxdy = \frac{27}{4}$$

Por tanto

$$x_c = \frac{\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} x\cdot 3dxdy}{\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} 3dxdy} = \frac{\frac{108}{5}}{\frac{27}{2}} = \frac{8}{5}$$

$$y_c = \frac{\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} y\cdot 3dxdy}{\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} 3dxdy} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{27}{2}} = \frac{1}{2}$$

Assim

$$\text{centro de massa} = (\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$$

2.(a) Calcule a massa de $D = \{(x,y)\,|\,(x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 \leqslant 100\}$ com função densidade $\delta(x,y) = x - 2y + 18$.

Demonstração. A massa esta dada por

$$\iint_D x - 2y + 18 dx dy$$

Para calcular esta integral consideremos a seguente mudançã de coordenadas

$$x - 2y + 3 = r\cos\theta, \quad 3x + 4y - 1 = r\sin\theta$$

resolvendo isso para x e y temos:

$$\begin{aligned} x(r,\theta) =& \frac{r}{5}\sin\theta + \frac{2}{5}r\cos\theta - 1, \\ y(r,\theta) =& \frac{r}{10}\sin\theta - \frac{3}{10}r\cos\theta + 1. \end{aligned}$$

A função de densidade em estas novas coordenadas é

$$\delta(x,y) = x - 2y + 18 = r\cos\theta + 15$$

além disso note que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\sin\theta}{5} + \frac{2\cos\theta}{5} & \frac{r}{5}\cos\theta - \frac{2r\sin\theta}{5} \\ \frac{\sin\theta}{10} - \frac{3\cos\theta}{10} & \frac{r\cos\theta}{10} + \frac{3r\sin\theta}{10} \end{vmatrix} = \frac{r}{10}$$

Logo por teorema mudança de variaveis temos que

$$\mathrm{Massa} = \iint_D x - 2y + 18 dx dy = \iint_{D'} (r\cos\theta + 15)\frac{r}{10} dr d\theta$$

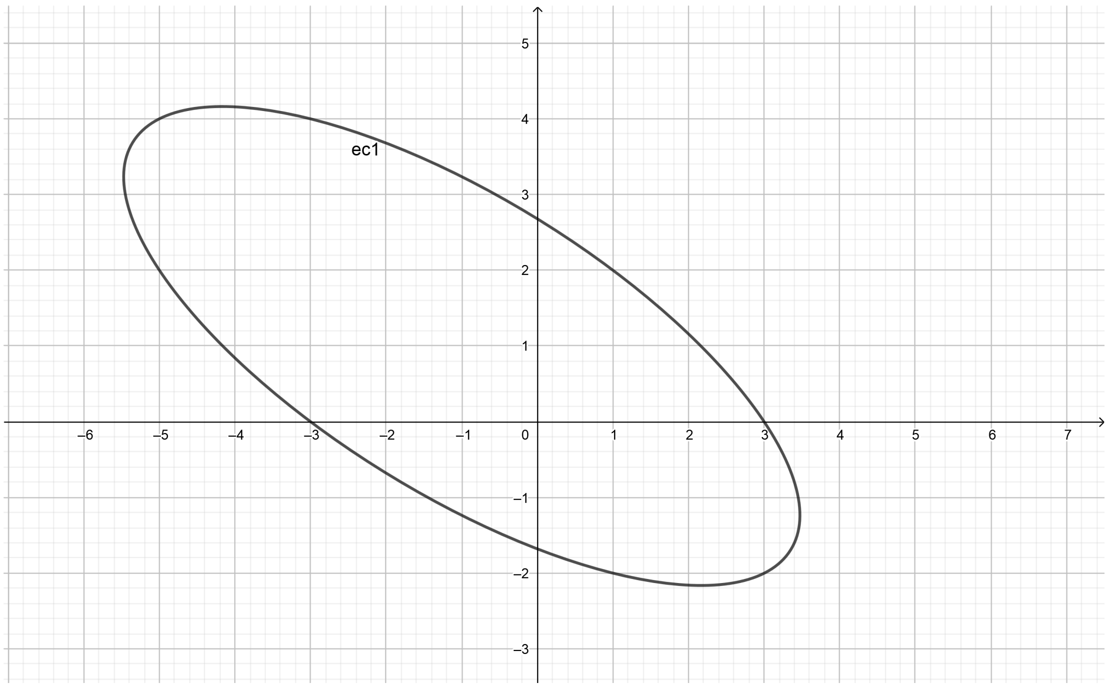
onde D' é a região limitada pela curva $(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 100$, isso é

$$D' = \left\{ (r,\theta) \,|\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{100} \right\}$$

assim

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{100}} (r\cos\theta + 15)\frac{r}{10} dr d\theta = 150\pi.$$

Observe que a mudança de coordenadas usada transforma um disco centrado no origem e de radio $\sqrt{100}$ na região de integração original na figura abaixo



$\square$

3. (b) Calcule as integrais iteradas:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-z^2}} z\sin y\,dx\,dz\,dy$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-z^2}} z\sin y\,dx\,dz\,dy &= \int_0^{\pi}\int_0^{2}\left(zx\sin y\right)\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{4-z^2}}\,dz\,dy\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2} z\sqrt{4-z^2}\sin y\,dz\,dy\end{aligned}$$

Considerando a primitiva auxiliar

$$\boxed{\int z\sqrt{4-z^2}\,dz = -\frac{1}{3}(4-z^2)^{\frac{3}{2}} + c}$$

temos que:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} -\frac{1}{3}(4-z^2)^{\frac{3}{2}} \sin y \Big|_{z=0}^{z=2} dy \\
&= \int_0^{\pi} \frac{8}{3} \sin y \, dy \\
&= -\frac{8}{3} \cos y \Big|_{y=0}^{y=\pi} \\
&= \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

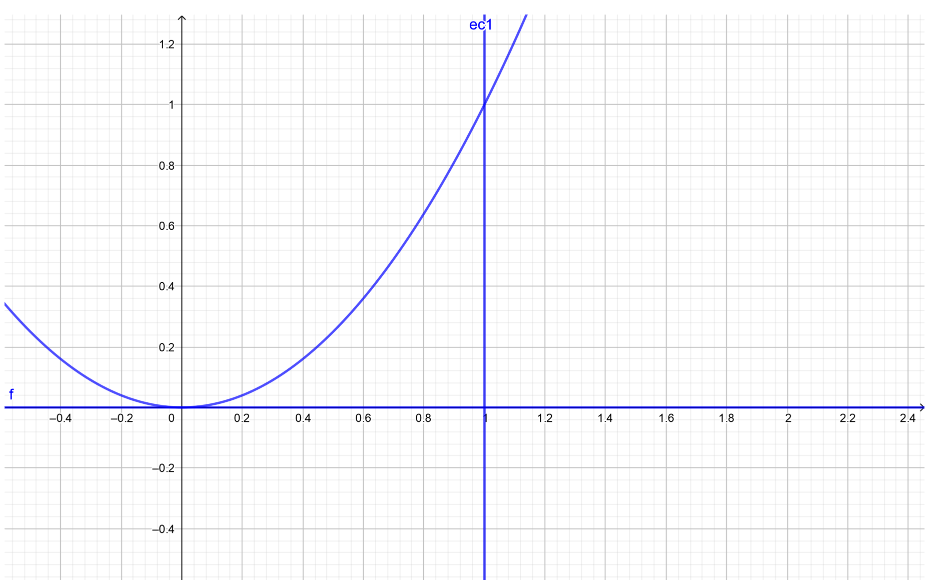
□

4.(b)

$$\iint_D y \, dx dy dz$$

onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2, y = 0$ e $x = 1$.

Demonstração. Note que a região de integração é $0 \leqslant z \leqslant x + 2y$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Para maior comprenção dos limites de integração primeiro pense na região limitada pelas curvas $y = x^2, y = 0, x = 1$ no plano xy, considere o gráfico seguente



Logo podemos deduzir sem problemas que $0 \leqslant y \leqslant x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. A variação de z esta limitada pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2y$, assim $0 \leqslant z \leqslant x + 2y$.

Po tanto a integral é

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \, dz dy dx = \frac{5}{28}.$$

$\square$

6. (c) calcule as seguentes integrais: (c)

$$\iiint_E x^2 dz dy dx,$$

onde E é o solido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ e contido no semiespaço $0 \leqslant z$.

Demonstração. a variação em z esta limitada pelo plano $z = 0$ e a parte superior do cone $z = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$, a variação no plano xy esta limitada pela projeção do cilindro, isso é, por o circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Logo a integral é

$$\begin{aligned} \iiint_E x^2 dz dy dx &= \iint_{D(0,1)} \int_0^{\sqrt{4x^2+4y^2}} x^2 dz dy dx \\ &= \iint_{D(0,1)} x^2 \sqrt{4x^2 + 4y^2} dy dx \end{aligned}$$

Para calcular esta ultima integral vamos usar coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, note a região de integração muda por $D = \{(r,\theta) \,|\, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2\theta \sqrt{4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^4 \cos^2\theta dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

$\square$

7. Determine o valor da região R limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

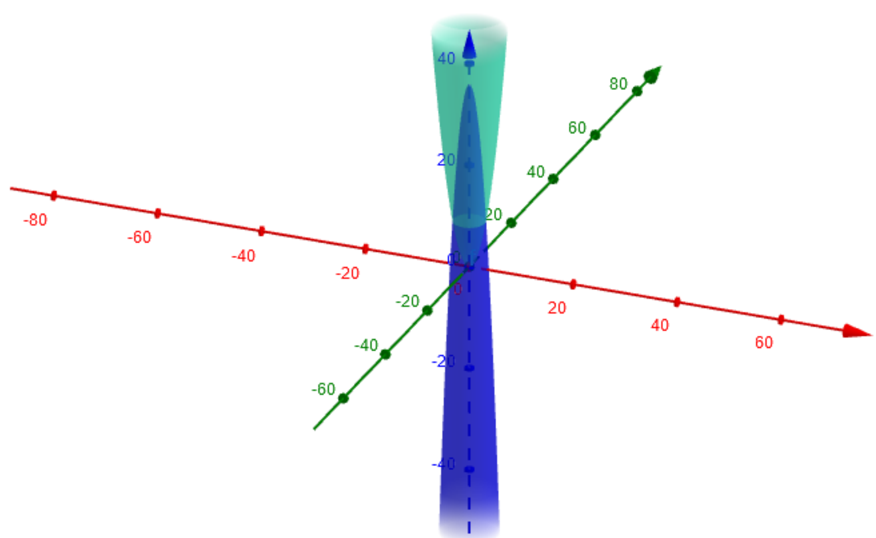
Demonstração. O volumem da região pode ser calculado com a integral

$$\iint_D \int_{x^2+y^2}^{36-3x^2-3y^2} dzdydx$$

onde D é a projeção do solido no plano xy. Esta projeção esta limitada pela interseção dos paraboloides, assim

$$\begin{aligned} x^2+y^2 =& 36-3x^2-3y^2 \\ 4x^2+4y^2 =& 36 \\ x^2+y^2 =& 9 = 3^2 \end{aligned}$$

Logo $D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 = 3^2\}$. Considere a seguente figura



Por tanto

$$\begin{aligned}\mathsf{Vol} &= \iint_D \int_{x^2+y^2}^{36-3x^2-3y^2} dz\,dy\,dx \\ &= \iint_D 36 - 4x^2 - 4y^2 dx\,dy\end{aligned}$$

Para calcular esta ultima integral usamos coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, onde a região de integração foi mudada por $D' = \{(r,\theta)\,|\,0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 3\}$, assim

$$\mathsf{Vol} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (36 - 4r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta) r\,dr\,d\theta = 162\pi.$$

9 (c). calcule as integrais .

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

onde E é a região interior ao cone $\phi = \frac{\pi}{6}$ e à esfera $\rho = 2$.

Demonstração. A região interior entro o cone e a esfera em coordenadas esféricas

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

esta dada por

$$R = \left\{(\rho,\phi,\theta)\,|\,0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{6}, 0 \leqslant \rho \leqslant 2\right\}$$

logo a integral fazendo a mudança de coordennadas é

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^2 \rho\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\ =& 8\pi - 8\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \\ =& 4\pi(2-\sqrt{3})\end{aligned}$$

□

10. Calcule o volume da região limitada pelo elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Demonstração. Para calcular o volume de esta região vamos a considerar o seguente mudança de coordenadas

$$x = a\rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = b\rho \sin\phi \sin\theta, z = c\rho \cos\phi$$

Note que a esfera de radio 1 é transformado pelo aplicação de mudança de coordenas para o elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Para isso veja que

$$\begin{aligned}
1 =& \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \\
=& \frac{a^2\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta}{b^2} + \frac{c^2\rho^2 \cos^2\phi}{c^2} \\
=& \rho^2 \sin^2\phi + \rho^2 \cos^2\phi \\
=& \rho^2.
\end{aligned}$$

Além disso, observe que o jacobiano associada é

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} =& \begin{vmatrix} a \sin\phi \cos\theta & a\rho \cos\phi \cos\theta & -a\rho \sin\phi \sin\theta \\ b \sin\phi \sin\theta & b\rho \cos\phi \sin\theta & b\rho \sin\phi \cos\theta \\ c \cos\phi & -c\rho \sin\phi & 0 \end{vmatrix} \\
=& abc\rho^2 \sin\phi
\end{aligned}$$

Logo aplicando o teorema de mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vol} = \iiint_E 1 dz dy dx =& \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 abc\rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta \\
=& \frac{4}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

□

12. Calcule a massa do solido $E = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2, 0 < a \leqslant z\}$, com $a < b$ e $\delta(x, y, z) = z$.

Demonstração. Note que z varia entre o plano $z = a$ e o hemisfério superior da esfera com radio b, $z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$, i.e.,

$$a \leqslant z \leqslant \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$$

Além disso a projeção do solido no plano xy é a região limitada pela curva interseção entre o plano $z = a$ o hemisfério superior da esfera de radio b, isso é

$$\begin{aligned} a =& \sqrt{b^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 =& b^2 - a^2 \end{aligned}$$

Por tanto a projeção no plano xy é

$$D = \left\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = b^2 - a^2\right\}$$

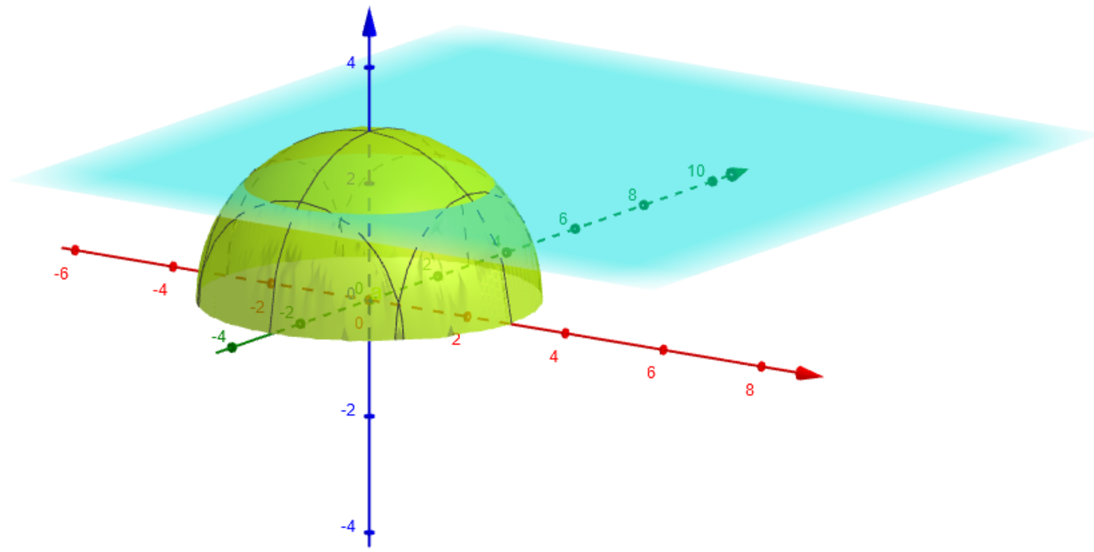
Logo

$$\begin{aligned} Massa =& \iint_D \int_a^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} z dz \\ =& \iint_D \left.\frac{z^2}{2}\right|_a^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} dxdy \\ =& \iint_D \frac{b^2 - x^2 - y^2}{2} - \frac{a^2}{2} dxdy \end{aligned}$$

Para calcular esta ultima integral vamos usar coordenadas polares, assim para $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ temos que

$$\begin{aligned} Massa =& \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} \left(\frac{b^2 - r^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) rdrd\theta \\ =& \frac{1}{4}(b^2 - a^2)^2 \pi. \end{aligned}$$

Considere a seguente figura para $a = 3$ e $b = 3$.



$\square$

14. Calcule a massa da região R limitada por: (a) $z(x^2+y^2) = 2, z = 0, x^2+y^2 = 1, x^2+y^2 = 2$, com $0 \leqslant x$ e $y \leqslant 0$ e $\delta(x,y,z) = 1$.

Demonstração. Temos que z varia entre o plano $z = 0$ e $z = \frac{2}{x^2+y^2}$, além que $D = \{(x,y) \,|\, 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2, 0 \leqslant x, y \leqslant 0\}$, assim

$$\begin{aligned} Massa &= \iint_D \int_0^{\frac{2}{x^2+y^2}} 1 dz dy dx \\ &= \iint_D \frac{2}{x^2+y^2} dy dx \end{aligned}$$

Usando coordenas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ a região muda para

$$D' = \left\{(r,\theta) \,|\, 1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, \frac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}$$

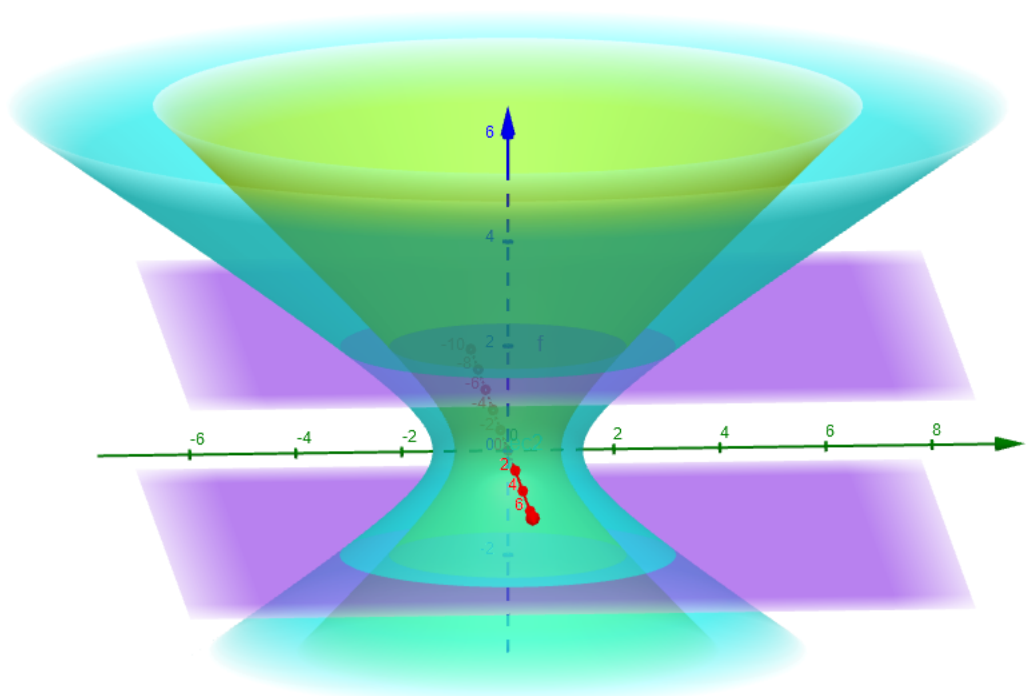
por tanto

$$\begin{aligned}
\text{Massa} =& \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{2}{r^2} r dr d\theta \\
=& \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2 \ln r|_{r=1}^{r=\sqrt{2}} d\theta \\
=& \pi \ln \sqrt{2} \\
=& \frac{\pi \ln 2}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

(f). $x^2 + y^2 = 1 + z^2, x^2 + y^2 = 2 + 2z^2, |z| \leqslant a, \delta(x, y, z) = z^2$

Demonstração. Veja a seguente figura para com $a = 2$



Vamos usar o teorema de mudança de coordenadas para achar o massa de este solido com dita densidade, considere a seguente mudança de coordenadas

$$x = r\phi\cos\theta, \quad y = r\phi\sin\theta, \quad z = \sqrt{r^2-1}$$

para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 < \phi, 1 < r$
Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} =& \begin{vmatrix} \phi\cos\theta & -r\phi\sin\theta & r\cos\theta \\ \phi\sin\theta & r\phi\cos\theta & r\sin\theta \\ \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ =& \frac{\phi r^3}{\sqrt{r^2-1}}\end{aligned}$$

O plano $\phi = 1$ é enviado por esta mudança de coordenas para a curva $x^2+y^2 = 1+z^2$, pois

$$\begin{aligned} x^2+y^2 =& \phi^2r^2\cos^2\theta + \phi^2r^2\sin^2\theta = \phi^2r^2 \\ 1+z^2 =& 1+(\sqrt{r^2-1})^2 = r^2 \end{aligned}$$

por tanto

$$\phi^2r^2 = r^2$$

implica

$$\phi = 1$$

De mesmo jeito temos que a mudança de coordenadas envia o plano $\phi = 2$ para a curva $x^2+y^2 = 2(1+z^2)$. Também notemos que para $|z| \leqslant a$ temos que

$$|\sqrt{r^2-1}| = \sqrt{r^2-1}$$

implica

$$r \leqslant \sqrt{a^2+1}, \quad 1 \leqslant r$$

Além que mostra que a mudança de coordenadas tem como imagem o semiespaço superior.
Agora temos que o domínio de integração nesta novas coordenadas esta dado por

$$D' = \left\{(r,\theta,\phi)\,|\,0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 1 \leqslant r \leqslant \sqrt{a^2+1}, 1 \leqslant \phi \leqslant 2\right\}$$

Assim

$$\mathrm{Massa} = \iiint_D z^2 dz dy dx$$

pela simetria de z^2 em relaxão ao plano xy temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Massa} =& 2\iiint_D z^2 dz dy dx, \quad 0 < z \\
=& 2\iiint_{D'} z^2 dz dy dx \\
=& 2\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{a^2+1}} (\sqrt{r^2-1})^2 \cdot \frac{\phi r^3}{\sqrt{r^2-1}} dr d\phi d\theta, \quad \text{pelo T.M.V} \\
=& 2\cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\phi^2}{2}\Bigg|_{\phi=1}^{\phi=\sqrt{2}} \right) \cdot \int_1^{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{r^2-1} r^3 dr
\end{aligned}$$

□

Usando a primitiva auxiliar

$$\boxed{\int \sqrt{r^2-1} r^3 dr = \frac{1}{15}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}(3r^2+2) + c}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Massa} =& 2\pi \frac{1}{15}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}(3r^2+2)\Bigg|_{r=1}^{r=\sqrt{a^2+1}} \\
=& 2\pi\left(\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3}\right).
\end{aligned}$$

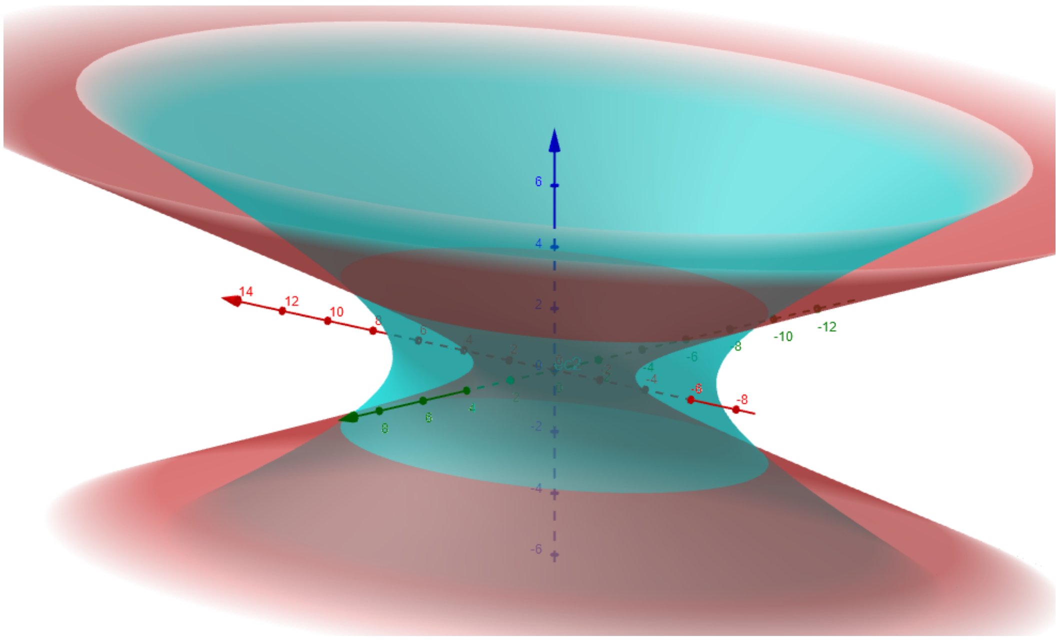
16. Calcule

$$\iiint_R z dz dy dx,$$

onde R é limitada por
(a)

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 + z^2, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4 + \frac{z^2}{2}, \quad \text{para} \quad 0 \leqslant z.$$

Considere a seguente figura



Para esto vamos a usar o seguente mudança de coordenadas

$$x = 3r\phi\cos\theta, \quad y = 2r\phi\sin\theta, \quad z = \sqrt{2r^2 - 1}$$

onde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 < \phi, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < r$.
Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} &= \begin{pmatrix} 3\phi\cos\theta & -3r\phi\sin\theta & 3r\cos\theta \\ 2\phi\sin\theta & 2r\phi\cos\theta & 2r\sin\theta \\ 2\frac{r}{\sqrt{2r^2-1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2\frac{\phi r^3}{\sqrt{2r^2 - 1}}\end{aligned}$$

Para essa mudança de coordenadas temos que

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= \frac{(3r\phi\cos\theta)^2}{9} + \frac{(3r\phi\sin\theta)^2}{4} = r^2\phi^2 \\ 1 + z^2 &= 1 + (\sqrt{2r^2 - 1})^2 = r^2 \\ 4 + \frac{z^2}{2} &= 4 + \frac{(\sqrt{2r^2 - 1})^2}{2} = \frac{7}{2} + r^2\end{aligned}$$

o que implica que as curvas

$$\begin{aligned}\phi =&\sqrt{2}\\ r =&\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2-1}}\end{aligned}$$

são mapeadas para as curvas $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1+z^2, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=4+\frac{z^2}{2}$. Para isso acontecer precisamos que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant&\frac{7}{2\sqrt{\phi^2-1}}=r\\ \phi\leqslant&2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Agora temos que a região de integração muda baixo a mudança de coordenadas para a região

$$R'=\left\{(r,\phi,\theta)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \sqrt{2}\leqslant\phi\leqslant 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2-1}}\right\}$$

assim

$$\begin{aligned}Massa=&\iiint_R z\,dz\,dy\,dx\\ =&\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2-1}}}(\sqrt{\phi^2-1})\cdot\frac{12\phi r^3}{\sqrt{\phi^2-1}}\,dr\,d\phi\,d\theta\\ =&24\pi\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{\phi^2-1}}}\phi r^3\,dr\,d\phi\\ =&24\pi\cdot\frac{9}{8}\\ =&27\pi.\end{aligned}$$