Gabarito
MAT2352 — Lista 1
Monitor: Juan Sebastián Herrera Carmona

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_R (2y^2 - 3xy^3)dxdy,$$

onde $R = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

Demonstração.

$$\iint_R 2y^2 - 3xy^3 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^3 (2y^2 - 3xy^3)dy \right) dx = \int_1^2 (2\frac{y^2}{2} - 3x\frac{y^4}{4})\Big|_{y=0}^{y=3} dx$$

$$= \int_1^2 18 - 3^5\frac{x}{4}dx = \left(18x - 3^5\frac{x^2}{8}\right)\Big|_1^2 = \frac{-585}{8}.$$

$\square$

(b)

$$\iint_R x \sin y \, dxdy,$$

onde $R = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{6}\}$. Resp. (b) $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$.

(c)

$$\iint_R \frac{1}{x + y} \, dxdy,$$

onde $R = [1, 2] \times [0, 1]$. Resp. (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

Demonstração. Note que a região de integração esta dado por

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

$$\mathsf{Vol} = \int_0^1 \left(\int_0^1 x\sqrt{x^2+y}dy \right) dy$$

Auxiliar primitiva 1.

$$\boxed{\int a\sqrt{b+y}dy = 2a\frac{(b+y)^{\frac{3}{2}}}{3} + \mathrm{const}, a, b \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vol} &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x(x^2+y)^{\frac{3}{2}} \right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3} \left(x(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - x^4 \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3} \left(x(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right) dx - \int_0^1 \frac{2}{3}x^4 dx
\end{aligned}$$

Auxiliar primitiva 2.

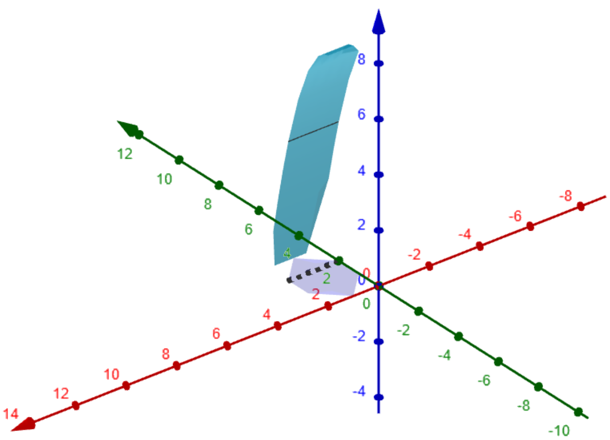
$$\boxed{\int \frac{2}{3}x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{15}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} + \mathrm{const}}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vol} &= \frac{2}{15}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{2}{3}\frac{x^5}{5}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

□

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

Demonstração. Considere a seguente gráfica



Note que para que a função $z(x,y) = 9 - y^2$ fique no primeiro octante devemos ter que $0 \leqslant y \leqslant 3$, assim a região de integração é

$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_0^2 \left(\int_0^3 9 - y^2 \right) dx = \int_0^2 (9y - \frac{y^3}{3}) \Big|_{y=0}^{y=3} dx \\ &= 36. \end{aligned}$$

$\square$

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx dy. \qquad \text{Resp.} \tfrac{1}{2} \text{ e } -\tfrac{1}{2}.$$

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

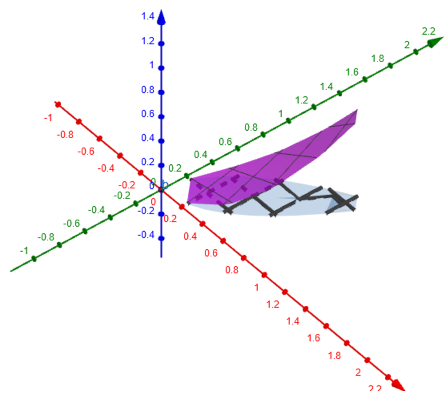
5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_D xy\,dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$.

Demonstração. Considere a seguente gráfica



$$\iint_D xy dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^1 (\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}) dx = \frac{1}{12}.$$

□

(b)

$$\iint_D (x^2 - 2xy)\,dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2 - x\}$. Resp. (b) $-\frac{19}{42}$.

(c)

$$\iint_D e^{x/y}\,dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : 1 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant x \leqslant y^3\}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy &= \int_1^2 \left(\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}}\,dx\right) dy = \int_1^2 ye^{\frac{x}{y}}\Big|_{x=y}^{x=y^3} dy\\ &= \int_1^2 (ye^{y^2} - ye)dy = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_{y=1}^{y=2} - \frac{y^2}{2}e\Big|_{y=1}^{y=2}\\ &= \frac{1}{2}e^4 - 2e.\end{aligned}$$

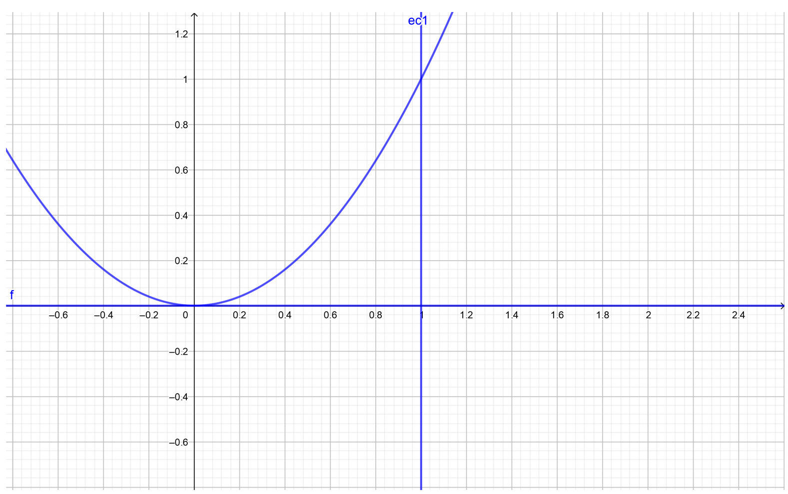
□

(d)

$$\iint_D x\cos y\,dxdy,$$

onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

Demonstração. Considere o seguente gráfico



dado que a curva $y = x^2$ e a reta $y = 0$ interseta-se em $(0, 0)$ temos que a região de integração é

$$D = \left\{(x, y)\,|\,0 \leqslant y \leqslant x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}$$

Assim

$$\iint_D x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x\cos y\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(-x\sin y\right)\Big|_{y=0}^{y=x^2} dx$$
$$= \int_0^1 -x(\sin x^2 - \sin 0)\,dx$$
$$= \int_0^1 -x\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}(1-\cos 1).$$

□

(e)

$$\iint_D 4y^3\,dx\,dy,$$

onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$. Resp. (e) $\frac{500}{3}$.

(f)

$$\iint_D xy\,dx\,dy,$$

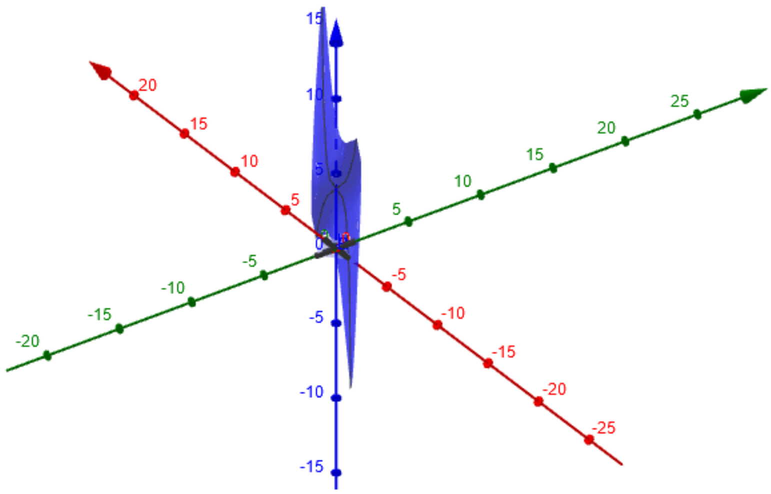
onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1. Resp. (f) $\frac{1}{8}$.

(g)

$$\iint_D (x^2 \mathrm{tg}\, x + y^3 + 4)\,dx\,dy,$$

onde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. Resp. (g) 8π.

Demonstração. Considere a seguente grafica



Observe que o gráfico tem um simetria em relaxão ao ponto (0,0,4).

$$\iint_D x^2\tan x + y^3 + 4dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} x^2\tan x + y^3 + 4dy\right)dx$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} x^2\tan x dy + \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y^3 dy + \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 4dy\right)dx$$

Note que a função y^3 é impar, logo

$$\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y^3 dy = 0,$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2x^2\tan x\sqrt{2-x^2} + 8\sqrt{2-x^2})dx.$$

De novo a função $2x^2\tan x\sqrt{2-x^2}$ impar, assim

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2x^2\tan x\sqrt{2-x^2}dx = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\tan x + y^3 + 4 dxdy =& 8\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx\\ =& 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}x + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\\ =& 8\pi.\end{aligned}$$

□

(h) Calcule

$$\iint_D e^{y-x}\, dxdy$$

sendo D a região plana limitada por: $y - x = 1$; $y - x = 2$; $y = 2x$ e $y = 3x$.

Demonstração. Para esta integral vamos dividir a região de integração D em duas regiões disjuntas

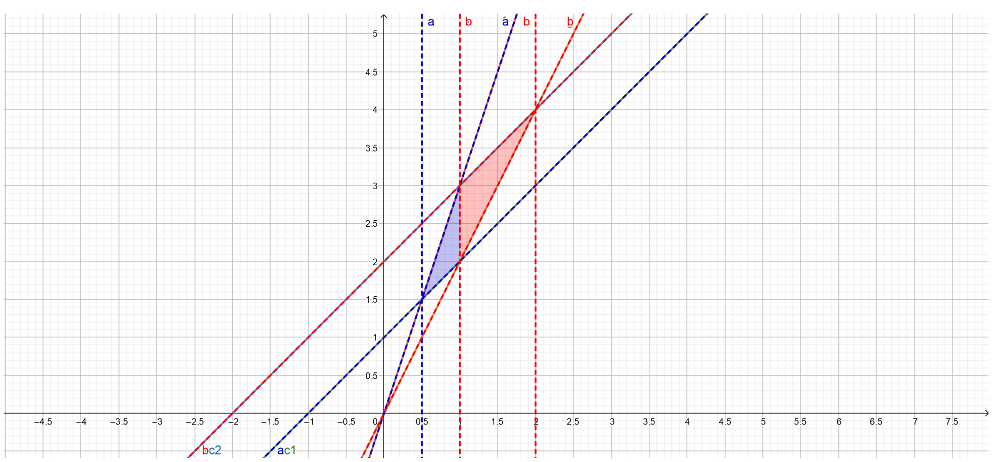
$$D_1 = \left\{(x, y)\,|\,\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, x + 1 \leqslant y \leqslant 3x\right\}$$

e

$$D_2 = \{(x, y)\,|\,1 \leqslant x \leqslant 2, 2x \leqslant y \leqslant x + 2\}$$

que vão facilitar o calculo

$$D = D_1 \cup D_2.$$



Logo

$$\iint_D e^{y-x}dxdy = \iint_{D_1} e^{y-x}dxdy + \iint_{D_2} e^{y-x}dxdy.$$

Calculando por pedaços temos o seguente

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} e^{y-x}dxdy =& \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{x+1}^{3x} e^{y-x}dx\right)dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (e^{-x}e^{y})|_{y=x+1}^{y=3x}\,dx\\
=& \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-x}(e^{3x}-e^{x+1})dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} - ex|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1}\\
=& \frac{1}{2}e^2 - e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} e^{y-x}dxdy =& \int_{1}^{2}\left(\int_{2x}^{x+2} e^{y-x}dy\right)dx = \int_{1}^{2} {}^{-x}(e^{y}|_{y=2x}^{y=x+2})dx\\
=& \int_{1}^{2} e^{-x}(e^{x+2}-e^{2x})dx = \int_{1}^{2} e^2 - e^x dx\\
=& e^2x|_{x=1}^{x=2} - e^x|_{x=1}^{x=2}\\
=& e.
\end{aligned}$$

Assim

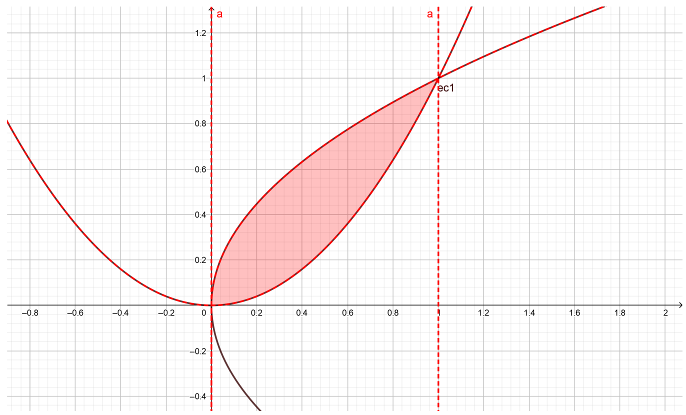
$$\iint_D e^{y-x}dxdy = e + \frac{1}{2}e^2 - e = \frac{1}{2}e^2.$$

□

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

(a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$. Resp. (a) $\frac{6}{35}$.

Demonstração. A região limitada no palano xy é



Agora o calculo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol} &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^1 (x^2 y + \frac{y^3}{3}) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 x^{2+\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^{2+2} - \frac{x^6}{3} dx \\
&= \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{(\frac{3}{2}+1)3} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{x^{4+1}}{4+1} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{x^{6+1}}{(6+1)3} \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{6}{35}.
\end{aligned}
$$

□

(b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ e $(1,2)$. Resp. (b) $\frac{31}{8}$.

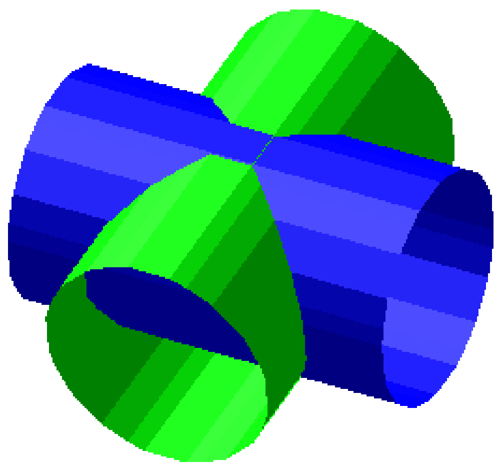
(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano
$x + 2y = 2$. Resp. (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2}\,\mathrm{arcsen}(\frac{2}{3})$.

(d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$. Resp. (d) $\frac{1}{6}$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$. Resp. (e) $\frac{1}{3}$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$.

Demonstração. Considere a seguente figura



Pela simetria o volumem de S desta figura 8 vezes o volumem intersectado com o primeiro octante, assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol} = 8\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}dx\right) dy =& 8\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-y^2}dy \\
=& 8\int_0^a a^2 - y^2 dy = 8a^2a - 8\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y=0}^{y=a} \\
=& \frac{16a^3}{3}.
\end{aligned}$$

□

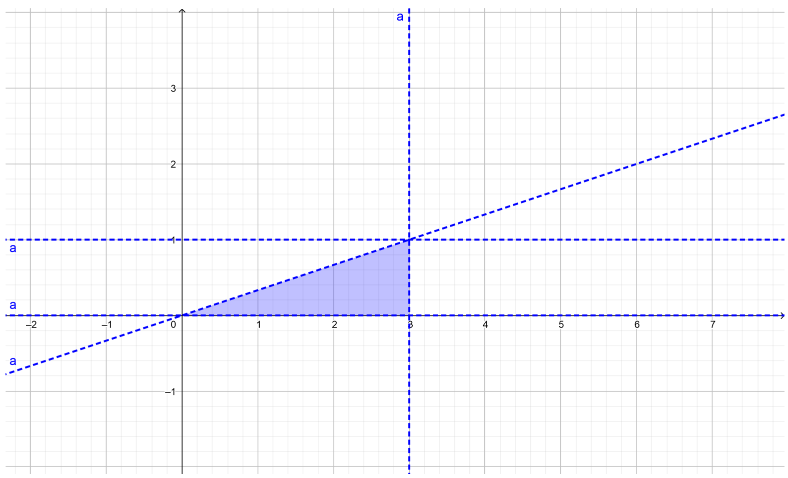
7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2+x+2$ e $x-2y+1=0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dxdy$

Demonstração. Note que a região de integração é

$$D = \{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1, 3y\leqslant x\leqslant 3\} = \left\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant \frac{x}{3}\right\}$$



$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_{3y}^3 e^{x^2}dx\right)dy &= \int_0^3\left(\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2}dy\right)dx\\ &= \int_0^3 e^{x^2}y\Big|_{y=0}^{y=\frac{x}{3}}dx\\ &= \int_0^3 e^{x^2}\frac{x}{3}dx = \frac{1}{6}\,e^{x^2}\Big|_{x=0}^{x=3}\\ &=\frac{1}{6}(e^9-1).\end{aligned}$$

□

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\, dx dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx dy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy dx$

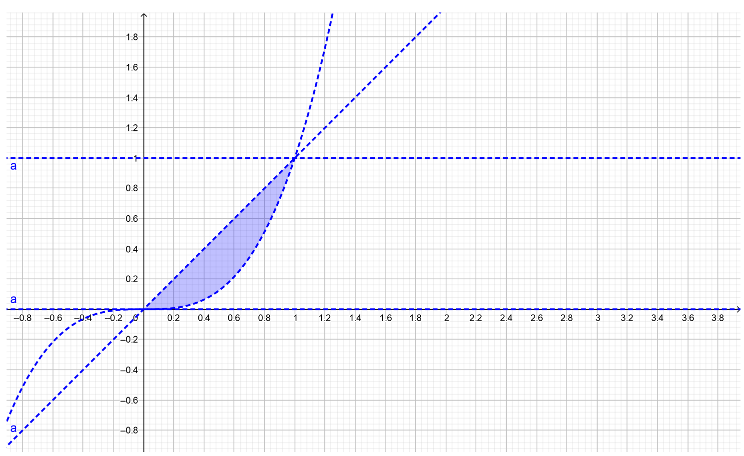
(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin x^2\, dx dy.$

Demonstração. Primeiramente note que para $0 \leqslant y \leqslant 1$ temos $\sqrt[3]{y} \leqslant y$, assim

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin x^2 dx dy = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} (-\sin x^2) dx dy.$$

Logo note que a região de integração

$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{y}\} = \left\{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1, x^3 \leqslant y \leqslant x\right\}$



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} (-\sin x^2) dx dy &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} (-\sin x^2) dy dx \\
&= \int_0^1 (-\sin x^2 y)\Big|_{y=x^3}^{y=x}\, dx \\
&= \int_0^1 -x\sin x^2 dx + \int_0^1 x^3 \sin x^2 dx.
\end{aligned}$$

Agora considerando as primitivas auxiliares

$$\boxed{\int -x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\cos x^2 + c, \qquad \int x^3 \sin x^2 dx = \frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2\cos x^2) + c}$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x^3}^{x} -\sin x^2 dy dx =& \frac{1}{2}\cos x^2\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2\cos x^2)\Big|_{x=0}^{x=1} \\ =& \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1) \\ =& \frac{1}{2}(\sin 1 - 1)\end{aligned}$$

□

Resp. (a) $(e^9-1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2}-1)/3$, (d) $\frac{1}{3}(e-1)$, (e) $\frac{1}{2}(\sin(1)-1)$.

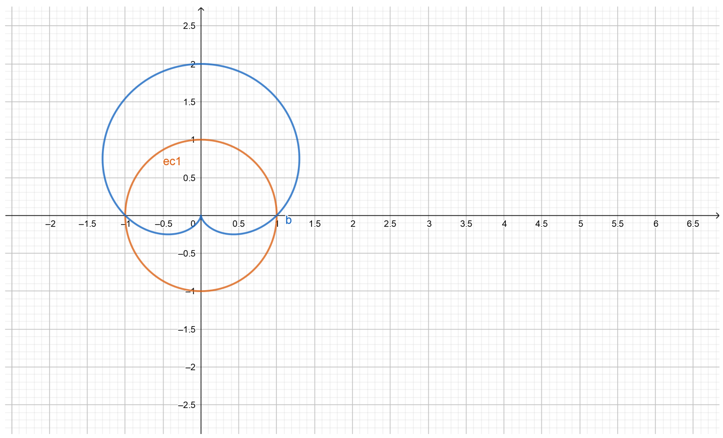
9. Calcule as integrais:

(a) $\iint_R x\,dxdy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\iint_R xy\,dxdy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=25$.

(c) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1+\sin\theta$ e exterior à circunferência $r=1$.

Demonstração. Consideremos a região de integração



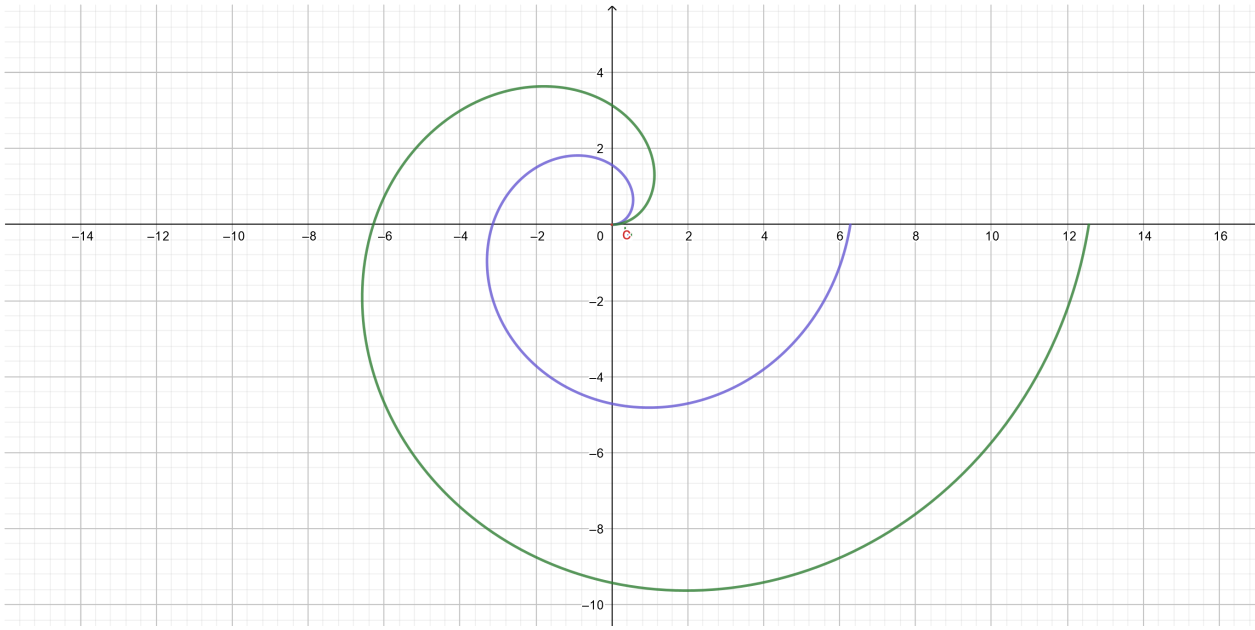
Usando coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy =& \int_0^{\pi}\int_1^{1+\sin\theta}\frac{1}{r}rdrd\theta \\
=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{1+\sin\theta} 1drd\theta, \quad \text{pela simetria} \\
=&2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = -2\cos\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
=&2.
\end{aligned}$$

□

(d) $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r=\theta$ e $r=2\theta$, com $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Demonstração. Considere o gráfico



Logo

$$\begin{aligned}\iint_R x^2+y^2\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_\theta^{2\theta} r^2 r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_\theta^{2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{(2\theta)^4}{4}-\frac{\theta^4}{4}\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{15}{4}\theta^4 d\theta = \left.\frac{15}{4}\frac{\theta^5}{5}\right|_0^{2\pi}\\ &= 24\pi^4.\end{aligned}$$

□

(e) $\iint_D (e^{-x^2-y^2})\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ e o eixo y.

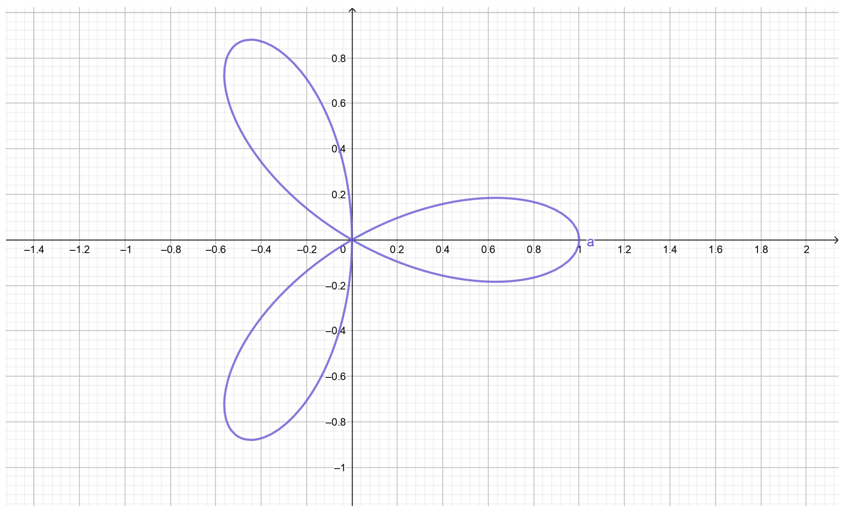
(f) $\iint_D \sqrt{(x-1)^2+y^2}\,dx\,dy$ sendo $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$.

Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$ (e) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-4})$, (f) $\frac{16}{9}$.

10. Esboce a curva e calcule a área da região indicada:

(a) a regio limitada por um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

Demonstração. Considere o gráfico



O Primeiro laço é formado quando $r(\theta) = \cos 3\theta = 0$, logo $3\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$, assim, $\theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$. Por tanto a área limitado pelo primeiro laço é

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\cos 3\theta} r dr d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{r=\cos 3\theta} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 3\theta}{2} d\theta.
\end{aligned}$$

Usando a primitiva auxiliar

$$\boxed{\int \cos^2 3\theta dx = \frac{1}{12}(6x + \sin 6x) + c}$$

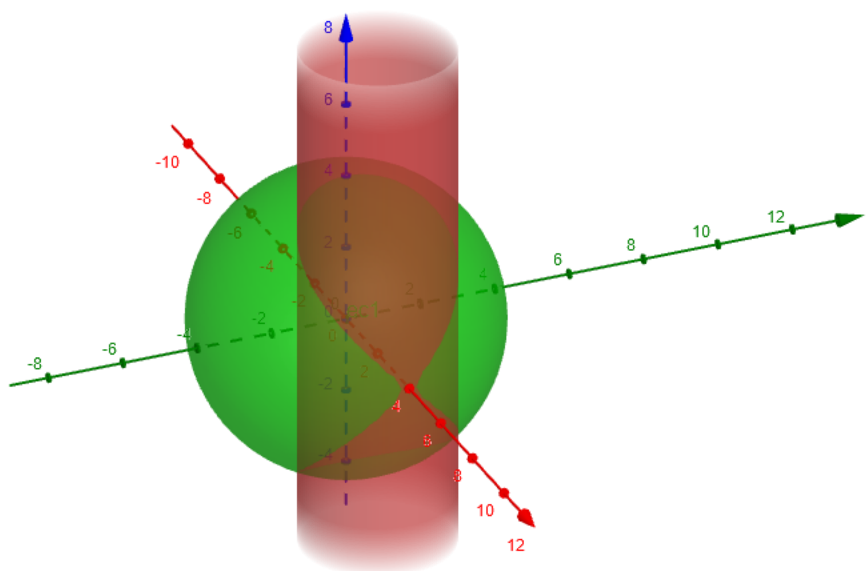
$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 3\theta}{2} d\theta =& \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}(6x + \sin 6x) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \right) \\
=& \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

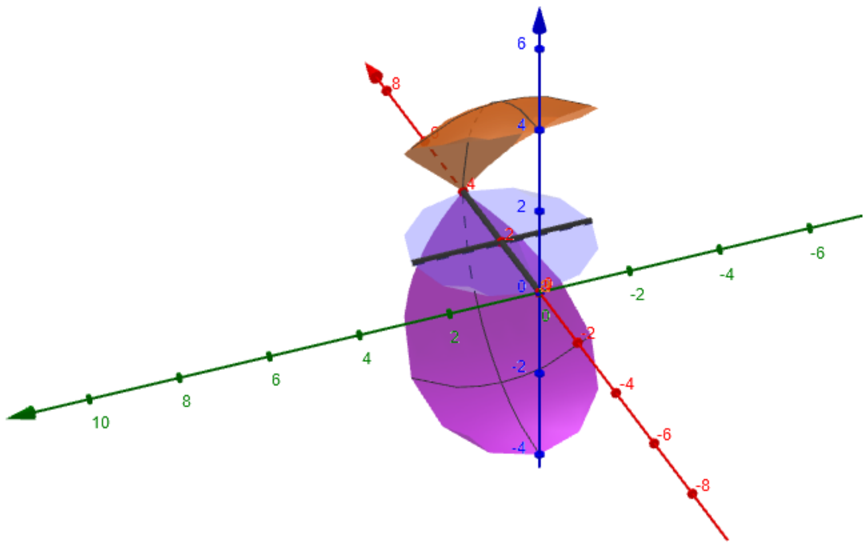
□

(b) a região limitada pela lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$ Resp. 4.

11. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$.

Demonstração. Considere as seguentes figuras para $a = 2$.





O volumem pedido é 2 vezes a integral da função

$$z(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

sobre o circulo de radio a e centro $(a, 0)$, Assim

$$\text{Vol} = 2\int_0^{2a}\int_{-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dy\,dx$$

Para calcular esta integral usaremos coordenadas polares. Notemos que $x = r\cos(\theta), y = r\sin\theta$ implica que $x^2 + y^2 = 2ax$ em coordenadas polares seja $r = 2\cos\theta$ para $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, logo a região de integração em coordenas polares é

$$D = \left\{(r, \theta)\,|\,0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol} =& 2\int_0^{2a}\int_{-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx\\
=& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}2r\,dr\right)d\theta
\end{aligned}$$

Usando a primitiva auxiliar

$$\boxed{\int \sqrt{4a^2-r^2}2r\,dr = -\frac{2}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+c}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol} =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=2a\cos\theta} d\theta\\
=& -\frac{2}{3}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(4a^2-4a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}-(4a^2)^{\frac{3}{2}}d\theta\right)\\
=& -\frac{2}{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8a^3|\sin\theta|^3 d\theta\right)+\frac{16}{3}a^3\pi
\end{aligned}$$

Note que $|\sin\theta|^3$ é uma função par, além disso temos que $|\sin\theta|^3 = \sin^3\theta$ para $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$\mathrm{Vol} = -\frac{2}{3}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8a^3\sin^3\theta\,d\theta\right)+\frac{16}{3}a^3\pi$$

Considerando a primitiva auxiliar

$$\boxed{\int \sin^3\theta\,d\theta = \frac{1}{12}(\cos 3\theta - 9\cos\theta)+c.}$$

Logo

$$\mathrm{Vol} = \frac{16}{3}a^3(\pi - \frac{4}{3}).$$

$\square$

13. Seja B o conjunto $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, a > 0, b > 0$. Verifique que

$$\iint_B f(x,y)dxdy = ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho f(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)d\rho \right] d\theta.$$

14. Seja B o conjunto $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leqslant r^2$ ($r > 0$, α e β reais dados) Verifique que

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \rho g(\theta,\rho)d\rho \right] d\theta.$$

onde $g(\theta,\rho) = f(x,y), x = \alpha + \rho\cos\theta$ e $y = \beta + \rho \operatorname{sen}\theta$.

15. (Coordenadas polares generalizadas)

(a) Calcule o jacobiano da transformação

$$x = ar\cos^{\alpha}\theta, \quad y = br\operatorname{sen}^{\alpha}\theta$$

onde $a > 0, b > 0, \alpha$ real.

Resp. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\theta\operatorname{sen}^{\alpha-1}\theta$.

(b) Calcule a área limitada pela curva

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2},$$

no primeiro quadrante, com a, b, k, h números reais positivos.

Resp. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$.

(c) Calcule a área limitada no primeiro quadrante pela curva

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$$

Demonstração. Considerando a mudança de coordenadas $x = ar\cos^8\theta, y = br\sin^8\theta$. A curva $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$ expressa-se por

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = \sqrt[4]{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^{\frac{1}{4}} = 1$$

□

sempre que $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ onde $\sin, \cos$ ficam no primeiro quadrante. Assim

$$\begin{aligned}
Area =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 1 \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr d\theta \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 abr \cos^7\theta \sin^7\theta d\theta \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \frac{ab}{2} \cos^7\theta \sin^7\theta d\theta \\
=& \frac{8}{2} \frac{1}{280} ab = \frac{ab}{70}.
\end{aligned}$$

16. Calcule a seguente integral

$$\iint_B \arctan(y/x) dx dy$$

onde B é a região do primeiro quadrante, limitado pelos círculos $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$ e as retas $y = x, y = \sqrt{3}$.

Resp. $\frac{7\pi^2}{192}$.