

MAT2352 — Lista 5

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies abaixo e calcule sua área:

- (a) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (b) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$;
- (c) S é a parte do plano $z = 2x + 3y$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$;
- (d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$;
- (e) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$;
- (f) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ax$, onde $a > 0$;
- (g) S é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$ em torno do eixo z ;
- (h) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $z \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}$.
- (i) S é a parte do parabolóide $z = 1 - 2x^2 - y^2$ limitada pela superfície $16x^2 + 4y^2 = 1$.

Resp. (a) $4\pi(2 - \sqrt{2})$, (b) 8π , (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi - 2)$, (g) $4ab\pi^2$, (h) 4π .

2. Sejam $0 < a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do (a) eixo- x , (b) eixo- y . Calcule a área da superfície em cada caso.

Resp. (a) $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, (b) $2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

3. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\iint_S y \, d\sigma$, onde S é a superfície dada por $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$;

(b) $\iint_S x^2 \, d\sigma$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(c) $\iint_S yz \, d\sigma$, onde S é a parte do plano $z = y + 3$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$;

(d) $\iint_S xy \, d\sigma$, onde S é o bordo da região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$;

(e) $\iint_S z(x^2 + y^2) \, d\sigma$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$;

(f) $\iint_S xyz \, d\sigma$, onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(g) $\iint_S \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 2}{2x^2 + 2y^2 - 1}} \, d\sigma$, onde S é a parte de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ com $1 \leq z \leq 3$;

(h) $\iint_S (x + 1) \, d\sigma$, onde S é a parte de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $x^2 + y^2 = 2y$.

Resp: (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, (c) $\pi\sqrt{2}/4$, (d) $-\frac{\pi}{4}(8 + \sqrt{2})$, (e) 16π , (f) 0 , (g) $8\pi\sqrt{2}$, (h) $\pi\sqrt{2}$.

4. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x, y, z)$ a densidade pontual de massa para:

(a) S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ contida no primeiro octante e $\delta(x, y, z) = y$.

(b) S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, 0, 2)$ e $\delta(x, y, z) = xz$.

(c) S é a parte do parabolóide $x = 4 - y^2 - z^2$ contida no semi espaço $x \geq 0$ e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(d) S é a parte de $z = x^2 + y^2 + 2xy$ limitada por $x^2 + y^2 = 2$ e $\delta(x, y, z) = \frac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{1 + 8z}}$

(e) S é a parte de $z = \ln(x^2 + y^2)$ limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = e^2$, e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Resp: (a) $3\sqrt{14}$, (b) $7\sqrt{6}/24$, (c) $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17} - 2347)$.

5. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, d\sigma$ para cada um dos campos de vetores \vec{F} e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de \vec{F} através de S . Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 9)$ é \vec{k} ;

(b) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$;

(c) $\vec{F}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$;

(d) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

(e) $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z\vec{k}$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 4)$ é \vec{k} ;

(f) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} - z\vec{k}$ e S consiste do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ e do disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$;

(g) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ e S é o cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;

(h) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y)\vec{i} - (2y + 1)\vec{j} + z\vec{k}$ e S é o retângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, orientado de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$;

- (i) $\vec{F}(x, y, z) = -yz\vec{i}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2, 0, 0)$ é \vec{i} ;
- (j) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z = \sqrt{4-x}$ limitada pela superfície cilíndrica $y^2 = x$, orientado de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{i} > 0$;
- (k) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, orientada de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.

Resp. (a) 0, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) 108π , (e) 128π , (f) $-\pi/2$, (g) 48, (h) -1 , (i) 0, (j) $128/5$, (k) $32/3$.

6. Calcule

- (a) $\iint_S xz \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + x^2 \, dx \wedge dy$, onde S é a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), $z \geq 0$, orientada segundo a normal exterior;
Resp. $3\pi a^4/4$.
- (b) $\iint_S x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$, onde S é a parte do plano $x+y+z = 2$ no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$;
Resp. 4.
- (c) $\iint_S x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ contida no semiespaço $z \geq 2y + 1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$.
Resp. 28π .

7. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , orientada de modo que sua normal unitária \vec{N} tenha a terceira componente não-negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S , mostre que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, d\sigma = \iint_D \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) \, dx \, dy.$$

8. Calcule $\iint_S y^2 z^2 dy \wedge dz + x dz \wedge dx + y dx \wedge dy$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2 + 2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y + 3$, orientada com \vec{N} tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.
 Resp. 54π .

9. Calcule $\iint_S e^{z^2} \ln(z + y) dy \wedge dz + (x^2 + z^2) dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ limitado pelo plano $z = y + 4$, orientada com \vec{N} tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$.
 Resp. $-\frac{35\pi}{16}$.

10. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x + y + z = 3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
 Resp. $\frac{7}{2}$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1 + y^2))\vec{j} + (xy + \sin z^3)\vec{k}$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 2)$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
 Resp. $\frac{4}{3}$.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (2z + \sin e^{x^3})\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \sin(\sin z^2))\vec{k}$ e γ é a intersecção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
 Resp. -4π .

(d) $\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(x^3))\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 - y^2 + z^{100})\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
 Resp. -1 .

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (2x + (1 + y^2)^{20})\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
 Resp. π .

(f) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e γ é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.
 Resp. $-a^2\pi\sqrt{3}$.