MAT2352 — Lista 4

1. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes, percorrida uma vez no sentido horário. Dê todos os valores possíveis para

$$(a) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}. \qquad (b) \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}.$$

Resp. (a) 0 ou -2π; (b) 0 ou $-\frac{\pi}{3}$.

2. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

3. Considere o campo $\vec{F}(x,y) = cxy\vec{i} + x^6y^2\vec{j}$, $c > 0$, atuando sobre uma partícula que se move do ponto $(0,0)$ até a reta $x = 1$ sobre a curva γ, gráfico da função $y = ax^b$, com $a > 0$ e $b > 0$. Determine um valor de c em termos de a e de b para que o trabalho realizado por $\vec{F}$ seja nulo. Resp. $c = -a^2b/3$.

4. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$ onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}} + 3x\right)$ se
(a) γ é a curva $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -8π.
(b) γ é a curva $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -14π.

5. Em cada item abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado D. Em caso afirmativo, determine um potencial de $\vec{F}$.

(a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$; Resp. Não.

(b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$; Resp. $\phi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3y - 3xy)\vec{j} - (4z^2y^2 + 2x^3z)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$; Resp. Não.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$; Resp. $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xz - yz$.

(e) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} + (2y\,\mathrm{sen}\,x - 4)\vec{j} + (3xz^2+2)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$; Resp. $\phi(x,y,z) = y^2\,\mathrm{sen}\,x + xz^3 - 4y + 2z$.

(f) $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; Resp. Não.

(g) $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \leqslant 0\}$;

Resp. $\phi(x,y) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$.

(h) $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; Resp. $\phi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

6. Prove que o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + xy\vec{j}$ é nulo ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das abscissas. Pode-se concluir que $\vec{F}$ é conservativo?

7. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma (-2xy + x^2)\,dx + \sqrt{8-y^7}\,dy$, onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, percorrido no sentido de x crescente. Resp. $\frac{\pi^3}{12}$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}\right) dx + (2y\ln(x^2+1))dy$, onde γ é o arco da elipse $4x^2 + y^2 = 1$ do ponto $(0,1)$ ao ponto $(\frac{1}{2},0)$ percorrido no sentido anti-horário. Resp. 0.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + xy\right) dy$ onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geqslant x - 1$ e $y^2 \leqslant x + 1$, orientada no sentido anti horário. Resp. $2\pi + \frac{9}{4}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma (2xy + \mathrm{sen}(y))dx + x\cos(y)dy + x^2 dz$ onde γ é a intersecção das superfícies $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = x$, no 1º octante e orientada de forma que a sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido horário.

Resp. $\frac{1}{12}\left(6\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+2y^2}dx + \frac{x}{x^2+2y^2}dy$ onde γ é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 3, percorrida no sentido horário. O campo $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta. Resp. -2π.

8. Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t,\ \operatorname{sen} t)$ para $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$.

Resp. π.

9. Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\int_\gamma 7x^6 y\, dx + x^7\, dy$ sendo $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, onde $t \in [0,1]$. Resp. 1.

(b) $\displaystyle\int_\gamma [\ln(x+y^2) - y]\, dx + [2y \ln(x+y^2) - x]\, dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2 + y^2 = 1$ com $y \geqslant 0$ orientada no sentido horário. Resp. $3\ln 3 - 2$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva dada por $x(t) = \cos^3 t$ e $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$ com $y \geqslant 0$ ligando os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, nessa ordem. Resp. $-\frac{\pi}{2}$.

10. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

(a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$. Resp. $a^2 b - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} \operatorname{sen} y\, dx + x \cos y\, dy$. Resp. $a \operatorname{sen} b$.