MAT2352 — Lista 3

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

(a)
$$\int_\gamma x\,ds, \quad \gamma(t) = (t^3, t), 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Resp. $(10\sqrt{10} - 1)/54$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma xy^4\,ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $x \geqslant 0$. Resp. $1638,4$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma (x - 2y^2)\,dy$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$. Resp. 48.

(d) $\displaystyle\int_\gamma xy\,dx + (x - y)\,dy$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$. Resp. $\frac{17}{3}$.

(e)
$$\int_\gamma xyz\,ds, \gamma : x = 2t, y = 3\,\mathrm{sen}\,t, z = 3\cos t, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2.$$

Resp. $9\sqrt{13}\pi/4$.

(f) $\displaystyle\int_\gamma xy^2z\,ds$, γ é o segmento de reta de $(1, 0, 1)$ a $(0, 3, 6)$. Resp. $3\sqrt{35}$.

2. Calcule o comprimento das curvas
(a) $\gamma(t) = (a(t - \mathrm{sen}\,t), a(1 - \cos t))$, onde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e $a > 0$. Resp. $8a$.
(b) $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\,t, t)$, onde $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$. Resp. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2} + 1)$.
(c) $\gamma(t) = (t, \frac{3t^2}{2}, \frac{3t^2}{2})$, onde $0 \leqslant t \leqslant 2$. Resp. 14.

3. (a) Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \leqslant t \leqslant 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x, y, z) = x$.
Resp. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.
(b) Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$. Se a densidade é $\delta(x, y) = x^2$, determine a massa e o centro de massa do cabo. Resp. 4π, $(\frac{16}{3\pi}, 0)$.

(c) Determine a massa e o centro de massa de um fio no espaço com o formato da hélice $x = 2\,\text{sen}\,t$, $y = 2\cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade é uma constante k. Resp. $2\sqrt{13}k\pi$, $(0, 0, 3\pi)$.

4. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ nos seguintes casos:

(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Resp. $-\frac{11}{15}$.

(b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois a $(1, 1, 1)$. Resp. 1.

5. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

(a) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$, ligando $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.

Resp. 2π.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário. Resp. $-\pi ab$.

(c) $\int_\gamma x^3y^2z\, dz$, γ é dada por $x = 2t$, $y = t^2$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Resp. $\frac{16}{11}$.

(d) $\int_\gamma z^2\, dx - z\, dy + 2y\, dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(0, 1, 1)$, de $(0, 1, 1)$ a $(1, 2, 3)$ e de $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 4)$. Resp. $\frac{77}{6}$.

6. Calcule

(a) $\int_\gamma x\, dx + (y + x)\, dy + z\, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 2y - 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\pi$.

(b) $\int_\gamma (2y + 1)\, dx + z\, dy + x\, dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, com $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, percorrida uma vez do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$. Resp. -2.

(c) $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-2\pi\sqrt{2}$.

(d) $\int_\gamma x\,dx + (y + x)\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário. Resp. 0.

(e) $\int_\gamma x^2\,dx + x\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 6π

(f) $\int_\gamma y^2\,dx + 3z\,dy$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x + 4y$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti horário. Resp. 10π.

(g) $\int_\gamma z\,dy - x\,dz$, sendo γ a intersecção do elipsóide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = \frac{4}{3}$ com o plano $x+z = 2$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Resp. $-2\pi\sqrt{3}$.

7. Calcule

(a) $\int_\gamma 2x\,dx + (z^2 - \dfrac{y^2}{2})\,dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$, de $(0, 2, 0)$ a $(0, 0, 2)$. Resp. 8.

(b) $\int_\gamma \dfrac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{x^2 + y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida uma vez no sentido horário.

Resp. 2π.

(c) $\int_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. $-\frac{3}{10}$.

8. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + (y + 2)\vec{j}$ ao mover uma partícula ao longo da ciclóide $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Resp. $2\pi^2$.

9. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\displaystyle\oint_\gamma x^2y\,dx + xy^3\,dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado positivamente.

Resp. $-1/12$.

(b) $\displaystyle\oint_\gamma (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$, orientada positivamente. Resp. $-1/6$.

(c) $\displaystyle\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário. Resp. $1/3$.

(d) $\displaystyle\oint_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, orientada no sentido anti-horário. Resp. 0.

(e) $\displaystyle\oint_\gamma xy\,dx + 2x^2\,dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$, orientada positivamente. Resp. 0.

(f) $\displaystyle\oint_\gamma 2xy\,dx + x^2\,dy$, γ é a cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ orientada positivamente. Resp. 0.

(g) $\displaystyle\oint_\gamma (xy + e^{x^2})\,dx + (x^2 - \ln(1+y))\,dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y = \operatorname{sen} x$, orientada positivamente. Resp. π.

(h) $\displaystyle\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (y^2 - x^2y)\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$. Resp. $\pi + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$.

10. (a) Seja D uma região limitada de $\mathbb{R}^2$ com D e ∂D satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D é

$$\text{Área}(D) = \oint_{\partial D} x\,dy = \oint_{\partial D} -y\,dx.$$

(b) Usando (a) calcule a área de
(i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$; (ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leqslant a^{2/3}\}$.

Resp. (i) $ab\pi$; (ii) $\frac{3}{8}a^6\pi$.

(c) Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\vec{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\vec{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Resp. $\frac{3\pi}{8}$.

11. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma x^2(5y\,dx + 7x\,dy) + e^y\,dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0,-2)$ a $(0,2)$ com $x \geqslant 0$.

Resp. $e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{125}{2}\pi$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma (2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3})\,dx + (x^2e^y + \operatorname{sen} y)\,dy$, sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$, percorrida de $(0,0)$ a $(2,0)$ com $y \geqslant 0$. Resp. $4 - \frac{3\pi}{4}$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}dr$, sendo γ a fronteira do retângulo $[1,2]\times[-1,1]$ e $\vec{v}(x,y) = 2\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})\,\vec{i} + (\ln(x^2+y^2) + 2x)\,\vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário.

Resp. 4.

12. (a) Calcule $\nabla\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ e $\nabla\operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$.

(b) Mostre que se $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $\vec{F} = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$, então $\vec{F}$ é conservativo.

13. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas curvas $y^2 = 2(x+2)$ e $x = a$, com $a > 0$, orientada no sentido horário; Resp. -2π.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a curva $y = x^2+1$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$, percorrida do ponto $(-1,2)$ a $(2,5)$.

Resp. $\frac{1}{2}\ln\frac{29}{5}$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2+y^2 = 4$, orientada no sentido horário.

Resp. 2π.

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2y\,dx - x^3\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, onde γ é a fronteira da região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$, orientada no sentido horário. Resp. π.

14. Verifique que a integral $\int_\gamma 2x \operatorname{sen} y \, dx + (x^2 \cos y - 3y^2) \, dy$, onde γ é uma curva ligando $(-1, 0)$ a $(5, 1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor. Resp. $25 \operatorname{sen} 1 - 1$.