MAT2352 — Lista 2

1. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem densidade δ, nos seguintes casos:

(a) $D = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ e $\delta(x, y) = x^2$.

(b) D é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $\delta(x, y) = x + y$.

(c) D é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$ e $\delta(x, y) = xy$.

(d) D é a região limitada pela parabola $y^2 = x$ e a reta $y = x - 2$ e $\delta(x, y) = 3$.

(e) $D = \{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$ e $\delta(x, y) = y$.

Resp. (a) $\frac{2}{3}$, $(0, \frac{1}{2})$, (b) 6, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, (c) $\frac{1}{6}$, $(\frac{4}{7}, \frac{3}{4})$, (d) $\frac{27}{2}$, $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$ (e) $\frac{\pi}{4}$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$.

2. (a) Calcule a massa de $D = \{(x, y) : (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leqslant 100\}$, com função densidade $\delta(x, y) = x - 2y + 18$. Resp. 150π.

(b) Calcule a massa de $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \sqrt[3]{x} \leqslant y \leqslant 1\}$ com função densidade $\delta(x, y) = e^{y^4} + \sqrt[3]{x^2}$. Resp. $\frac{1}{4}(e - \frac{3}{5})$.

3. Calcule as integrais iteradas:

(a)
$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz \, dx dy dz$$

(b)
$$\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \sin y \, dx dz dy.$$

Resp. (a) $\frac{1}{48}$, (b) $\frac{16}{3}$.

4. Calcule as integrais triplas:

(a)
$$\iiint_D yz \, dx dy dz,$$

onde $D = \{(x, y, z) : 0 \leqslant z \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2z, 0 \leqslant x \leqslant z + 2\}$.

(b)
$$\iiint_D y \, dx dy dz,$$

onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

(c)

$$\iiint_D xy \, dx dy dz,$$

onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

(d)

$$\iiint_D z \, dx dy dz,$$

onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.

(e)

$$\iiint_D x \, dx dy dz,$$

onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

Resp. (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$.

5. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cuja densidade é dada pela função $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Resp. a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$.

6. Calcule as seguintes integrais:

(a)

$$\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx dy dz,$$

onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.

(b)

$$\iiint_E y \, dx dy dz,$$

onde E é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

(c)

$$\iiint_E x^2 \, dx dy dz,$$

onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ e contido no semiespaço $z \geqslant 0$. Resp. (a) 24π, (b) 0, (c) $2\pi/5$.

7. Determine o volume da região R limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

Resp.162π.

8. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ o pelo plano $z = a$ ($a > 0$), se S tem densidade constante K. Resp. $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$.

9. Calcule as integrais:

(a)

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dx dy dz,$$

onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

(b)

$$\iiint_E y^2\, dx dy dz,$$

onde E é a parte da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ contida no primeiro octante.

(c)

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx dy dz,$$

onde E é a região interior ao cone $\phi = \pi/6$ e à esfera $\rho = 2$.

Resp. (a) $4\pi/5$, (b) $\pi/30$, (c) $4\pi(2 - \sqrt{3})$.

10. Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Resp. $\frac{4}{3}\pi abc$.

11. Calcule a integral $\iiint_E x\, dx dy dz$, onde $E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0\}$. Resp. 3π.

12. Calcule a massa do sólido $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2,\ z \geqslant a > 0\}$, com $a < b$ e $\delta(x, y, z) = z$.

Resp. $\frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)^2$.

13. (a) Calcule o volume da região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Resp. $\frac{a^3\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

(b) Calcule a massa da região acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, dentro da esfera $x^2+y^2+z^2 = 2az,\ a > 0$ com $\delta(x,y,z) = x^2+y^2$ Resp. $\frac{11}{30}\pi a^5$.

(c) Calcule

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

onde V o slido limitado por $x^2+y^2+z^2 = 2z,\ z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ Resp. $\frac{(9\sqrt{3}-4\sqrt{2})\pi}{20}$.

14. Calcule a massa da região R limitada por:

(a) $z(x^2+y^2) = 2, z = 0, x^2+y^2 = 1, x^2+y^2 = 2$, com $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$ e $\delta(x,y,z) = 1$ Resp. $\frac{\pi \ln 2}{2}$.

(b) $z^2 = x^2+y^2, x^2+y^2-2y = 0$, para $x \geqslant 0$ com $\delta(x,y,z) = 1$ Resp. $\frac{32}{9}$.

(c) $x^2+y^2 = 1+z^2, x^2+y^2 = 4$ com $\delta(x,y,z) = |z|$; Resp.$\frac{9\pi}{2}$.

(d) $x^2+y^2 = 1+z^2, x^2+y^2 = z^2$, para $|z| \leqslant a$ com $\delta(x,y,z) = |z|$; Resp. πa^2.

(e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1+z^2, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 2z^2$ com $\delta(x,y,z) = 1$; Resp. 8π.

(f) $x^2+y^2 = 1+z^2, x^2+y^2 = 2+2z^2$, para $|z| \leqslant a$ com $\delta(x,y,z) = z^2$. Resp. $2\pi(\frac{a^5}{5}+\frac{a^3}{3})$.

15. (a) Calcule

$$\iiint_R (x+y+z)(x+y-z)dxdydz$$

para R limitada por: $x+y+z = 1, x+y+z = 2, x+y-z = 0, x+y-z = 2$, $x-y-z = 1$ e $x-y-z = 2$; Resp. $\frac{3}{4}$.

(b) Calcule a massa do sólido

$$R = \{(x,y,z) \mid (x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y-z)^2 \leqslant 25\,,\quad x+y+z \geqslant 0\,,\ x+y-z \geqslant 0\},$$

onde a densidade $\delta(x,y,z) = (x+y+z)(x+y-z)$. Resp. $\frac{625}{6}$.

16. Calcule

$$\iiint_R z\, dxdydz,$$

onde R é limitada por:

(a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1+z^2, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 4+\frac{z^2}{2}$, para $z \geqslant 0$. Resp. 27π.

(b) $z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$; $z = -\sqrt{x^2+y^2}$; $x^2 + y^2 = 4$. Resp. 2π.

17. Seja R a região do $1^{\underline{o}}$ octante limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e pelo plano $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, e contida no semiespaço $y \geqslant \sqrt{3}/3$. Calcule a massa de R sendo $\delta(x, y, z) = y$ a sua densidade.

Resp. π.