MAT2352 — Lista 1

Prof. Kostiantyn Iusenko

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_R (2y^2 - 3xy^3)\,dxdy,$$

onde $R = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$. Resp. (a) $-\frac{585}{8}$.

(b)

$$\iint_R x \sin y \, dxdy,$$

onde $R = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{6}\}$. Resp. (b) $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$.

(c)

$$\iint_R \frac{1}{x + y}\, dxdy,$$

onde $R = [1, 2] \times [0, 1]$. Resp. (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1)$.

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. Resp. 36.

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dydx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dxdy.$$

Resp. $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a)

$$\iint_D xy\, dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$. Resp. (a) $\frac{1}{12}$.

(b)

$$\iint_D (x^2 - 2xy)\, dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2 - x\}$. Resp. (b) $-\frac{19}{42}$.

(c)

$$\iint_D e^{x/y}\, dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : 1 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant x \leqslant y^3\}$. Resp. (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$.

(d)

$$\iint_D x \cos y\, dxdy,$$

onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$. Resp. (d) $(1 - \cos 1)/2$.

(e)

$$\iint_D 4y^3\, dxdy,$$

onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$. Resp. (e) $\frac{500}{3}$.

(f)

$$\iint_D xy\, dxdy,$$

onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. Resp. (f) $\frac{1}{8}$.

(g)

$$\iint_D (x^2 \mathrm{tg}\, x + y^3 + 4)\, dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. Resp. (g) 8π.

(h) Calcule

$$\iint_D e^{y-x}\, dxdy$$

sendo D a região plana limitada por: $y - x = 1$; $y - x = 2$; $y = 2x$ e $y = 3x$. Resp. (h) $\frac{e^2}{2}$.

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

(a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$. Resp. (a) $\frac{6}{35}$.

(b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$. Resp. (b) $\frac{31}{8}$.

(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano
$x + 2y = 2$. Resp. (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2}\,\mathrm{arcsen}(\frac{2}{3})$.

(d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$. Resp. (d) $\frac{1}{6}$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$. Resp. (e) $\frac{1}{3}$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$, onde $a > 0$. Resp. (f) $\frac{16}{3}a^3$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2+x+2$ e $x-2y+1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx dy$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2)\, dx dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx dy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy dx$

(e) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \operatorname{sen}(x^2)\, dx dy.$

Resp. (a) $(e^9-1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2}-1)/3$, (d) $\frac{1}{3}(e-1)$, (e) $\frac{1}{2}(\sin(1)-1)$.

9. Calcule as integrais:

(a) $\iint_R x\, dx dy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\iint_R xy\, dx dy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=25$.

(c) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx dy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1+\sin\theta$ e exterior à circunferência $r=1$.

(d) $\iint_D (x^2+y^2)\, dx dy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(e) $\iint_D (e^{-x^2-y^2})\, dx dy$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ e o eixo y.

(f) $\iint_D \sqrt{(x-1)^2+y^2}\, dx dy$ sendo $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$.

Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$ (e) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-4})$, (f) $\frac{16}{9}$.

10. Esboce a curva e calcule a área da região indicada:

(a) a regio limitada por um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$ Resp. $\frac{\pi}{12}$.

(b) a região limitada pela lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$ Resp. 4.

11. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$. Resp. $\frac{16a^3}{3}\left(\pi + \frac{4}{3}\right)$

12. Seja B o conjunto $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, a > 0, b > 0$. Verifique que

$$\iint_B f(x,y) = ab\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho f(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)d\rho\right]d\theta.$$

13. Seja B o conjunto $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leqslant r^2$ ($r > 0$, α e β reais dados) Verifique que

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^r \rho g(\theta,\rho)d\rho\right]d\theta.$$

onde $g(\theta,\rho) = f(x,y), x = \alpha + \rho\cos\theta$ e $y = \beta + \rho\operatorname{sen}\theta$.

14. (Coordenadas polares generalizadas)

(a) Calcule o jacobiano da transformação

$$x = ar\cos^{\alpha}\theta, \quad y = br\operatorname{sen}^{\alpha}\theta$$

onde $a > 0, b > 0, \alpha$ real.

Resp. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\theta\operatorname{sen}^{\alpha-1}\theta$.

(b) Calcule a área limitada pela curva

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2},$$

no primeiro quadrante, com a, b, k, h números reais positivos.

Resp. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$.

(c) Calcule a área limitada no primeiro quadrante pela curva

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$$

Resp. $\frac{ab}{70}$.

15. Calcule a seguente integral

$$\iint_B \arctan(y/x)dxdy$$

onde B é a região do primeiro quadrante, limitado pelos círculos $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$ e as retas $y = x, y = \sqrt{3}$.

Resp. $\frac{7\pi^2}{192}$.