

MAT1351 — Lista 3
Prof. Kostiantyn Iusenko

1. Encontre o valor do limite e justifique:

a) $\lim_{y \rightarrow 2} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$;

b) $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$;

c) $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^3 - 1}{s - 1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$;

g) $\lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^3 + 8}{y + 2}$;

h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$;

i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h+1} - 1}{h}$;

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$;

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$;

l) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$;

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$;

n) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$;

o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

2. Se $f(x) = \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$, mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{6}$, mas $f(0)$ não está definida.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & \text{se } x \neq 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$

a) Determine $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e mostre que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.

b) Esboce o gráfico de f .

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \neq -2, \\ 1, & \text{se } x = -2. \end{cases}$

a) Determine $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ e mostre que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$.

b) Esboce o gráfico de f .

5. Esboce o gráfico e determine o limite indicado, se este existir. Se o limite não existir, dê a razão.

a) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 2, \\ 1, & \text{se } x = 2, \\ 0, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

1) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, 2) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, 3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{se } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2, \\ 8 - 2x, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$$d) f(t) = \begin{cases} 3 + t^2, & \text{se } t < -3, \\ 0, & \text{se } t = -3, \\ 9 - t^2, & \text{se } t > -3. \end{cases}$$

$$1) \lim_{t \rightarrow -3^+} f(t), \quad 2) \lim_{t \rightarrow -3^-} f(t), \quad 3) \lim_{t \rightarrow -3} f(t).$$

6. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L.$$

Determine c e L .

7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

a) Supondo que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x}$.

b) Supondo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

c) Supondo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

8. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e positiva e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

b) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

c) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = +\infty.$$

9. Dê exemplos de funções f e g tais que

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, e $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = 1$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] \neq 0$.