MAT1351 — Lista 3
Prof. Kostiantyn Iusenko

1. Encontre o valor do limite e justifique:

a) $\lim\limits_{y \to 2} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$;

b) $\lim\limits_{t \to 3} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$;

c) $\lim\limits_{s \to 1} \dfrac{s^3 - 1}{s - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$;

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$;

f) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$;

g) $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$;

h) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$;

i) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h+1} - 1}{h}$;

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$;

k) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{1 - x}$;

l) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$;

m) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$;

n) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$;

o) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

2. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$, mostre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{6}$, mas $f(0)$ não está definida.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, \text{ se } x \neq 1, \\ 1, \text{ se } x = 1. \end{cases}$

   a) Determine $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e mostre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

   b) Esboce o gráfico de f.

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x \neq -2, \\ 1, \text{ se } x = -2. \end{cases}$

   a) Determine $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ e mostre que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$.

   b) Esboce o gráfico de f.

5. Esboce o gráfico e determine o limite indicado, se este existir. Se o limite não existir, dê a razão.

   a) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < 2, \\ 1, \text{ se } x = 2, \\ 0, \text{ se } x > 2. \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, 2) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, 3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

   b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, \text{ se } x \leqslant 1, \\ 2 - x, \text{ se } x > 1. \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, 2) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, 3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leqslant 2, \\ 8 - 2x, \text{ se } x > 2. \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, 2) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, 3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

d) $f(t) = \begin{cases} 3 + t^2, \text{ se } t < -3, \\ 0, \text{ se } t = -3, \\ 9 - t^2, \text{ se } t > -3. \end{cases}$

1) $\lim\limits_{t \to -3^+} f(t)$, 2) $\lim\limits_{t \to -3^-} f(t)$, 3) $\lim\limits_{t \to -3} f(t)$.

6. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L.$$

Determine c e L.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

a) Supondo que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ calcule $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{x}$.

b) Supondo que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

c) Supondo que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

8. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e positiva e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = +\infty$.

b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = +\infty$.

c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então tem-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = +\infty$.

9. Dê exemplos de funções f e g tais que

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$, e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$, e $\lim\limits_{x \to 0} f(x) - g(x) = 1$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) - g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} f(x) - g(x) \neq 0$.