Lista 6 (optativa)

Vamos ser amigos dos anéis!

1. Nos casos abaixo, verifique se o conjunto R com as operaçõoes indicadas, é um anel. Justifique suas respostas.

   a) $R = \mathbb{Z}^+$, com a adição e multiplicação usuais.

   b) $R = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, com a adição e multiplicação componente e componente.

   c) $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ com adição e multiplicação usuais.

   d) $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ com adição e multiplicação usuais.

   e) $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e a soma e o produto são dados por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd; ad + bc + bd)$.

   f) R é o conjunto das funções continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e as operações são a soma e o produto usuais de funções.

2. Ache os divisores de zero e os elementos que tem inversos em $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{21}$ e $\mathbb{Z}_{89}$.

3. Encontre todas as soluções da equação $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ em $\mathbb{Z}_{12}$.

4. Se $a^2 = 0$ em R mostre que $ax + xa$ comuta com a.

5. Seja F um corpo finito. Mostre que existe primo p tais que $pa = 0$ para todos $a \in F$.

Os Polinômios

1. Encontre o mdc e o mmc entre os seguintes polinômios, sobre o corpo $\mathbb{Q}$:

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 4$ e $g(x) = x^5 - 6x + 1$.

   b) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^6 + x^3 + x + 1$.

2. Determine o grau dos polinômios:

   a) $(1 - x)(2 - x) + (3 - x)(3 + x) \in \mathbb{Q}[x]$.

   b) $(x + 3)^{37} + (3 - x)^{37} \in \mathbb{Z}_{37}[x]$.

   c) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

3. Encontre o resto na divisão de

   x^{32} por $x^3 + x + 1$ em $\mathbb{Q}[x]$.

4. Considere $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = x^2 + 2x - 3$, em $\mathbb{Z}_7[x]$. Encontre $q, r \in \mathbb{Z}_7[x]$ tais que $f = g \cdot q + r$, com $r = 0$ ou $\deg(r) < 2$.

5. Moste que os seguintes polinomis são irredutíveis sobre copro indicado.

   a) $x^2 + 7$ sobre $\mathbb{R}$.

   b) $x^3 - 3x + 3$ sobre $\mathbb{Q}$.

c) $x^2 + x + 1$ sobre $\mathbb{Z}_2$.

d) $x^2 + 1$ sobre $\mathbb{Z}_{19}$.

e) $x^3 - 9$ sobre $\mathbb{Z}_{13}$.

f) $x^4 + 2x^2 + 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

6. Mostre que se p é um primo, então o polinômio $f(x) = x^n - p$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ para qualquer $n > 0$.