Gabarito Lista 5, Álgebra I

2. $(\overline{14})^{-1} = \overline{14}$ em $\mathbb{Z}_{15}$; $(\overline{38})^{-1} = \overline{53}$ em $\mathbb{Z}_{83}$; $(\overline{351})^{-1} = \overline{35}$ em $\mathbb{Z}_{6669}$; $(\overline{91})^{-1} = \overline{451}$ em $\mathbb{Z}_{2565}$;

3. Em $\mathbb{Z}_{20}$:
   a) $\overline{-10} = \overline{10}$ e $\overline{-6} = \overline{14}$;
   b) $\overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}$ são divisores de zero.
   ?) $(\overline{1})^{-1} = \overline{1}$, $(\overline{3})^{-1} = \overline{7}$, $(\overline{7})^{-1} = \overline{3}$, $(\overline{9})^{-1} = \overline{9}$, $(\overline{11})^{-1} = \overline{11}$, $(\overline{13})^{-1} = \overline{17}$, $(\overline{17})^{-1} = \overline{13}$, $(\overline{19})^{-1} = \overline{19}$.

4. a) $(\overline{3})^{-1} = \overline{7}$ em $\mathbb{Z}_{20}$. Assim $\overline{3}x = \overline{7}$ em $\mathbb{Z}_{20}$ implique que $x = \overline{7} \cdot \overline{7} = \overline{9}$ em $\mathbb{Z}_{20}$.
   b) $(\overline{6})^{-1} = \overline{6}$ em $\mathbb{Z}_{35}$. Assim $\overline{6}x - 2 = \overline{11}$ em $\mathbb{Z}_{35}$ implique que $x = \overline{11 + 2 \cdot 6} = \overline{8}$ em $\mathbb{Z}_{20}$.

5. Como $\mathrm{mdc}(c, m) = 1$ assim $\overline{c}$ tem inverso modular $\overline{c}^{-1}$. Assim $\overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c}$ implica que $\overline{a} = \overline{b}$.

6. Aplique o Teorema de Fermat em $\mathbb{Z}_p$.

7. a) $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ são idempotentes em $\mathbb{Z}_6$.

   $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{4}$, $\overline{9}$ são idempotentes em $\mathbb{Z}_{12}$.

   b) $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$ são idempotentes em $\mathbb{Z}_{10}$.

   $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{6}$, $\overline{10}$, $\overline{20}$, $\overline{25}$ são idempotentes em $\mathbb{Z}_{30}$.

8. Veja as anotações da aula.

9. $\overline{0} \cdot \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$, $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$, $\overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{2}$, $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{2}$, $\overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{4}$, $\overline{6} \cdot \overline{6} = \overline{1}$.

10. Temos que
   $$x^2 + x + \overline{1} = x^2 + 2x + \overline{1} - x = (x + 1)^2 - x.$$
   Assim $(x + 1)^2 = x$ em $\mathbb{Z}_7$ implique que $x = 3$ ou $x = 5$.

11. Temos que
   $$\overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{3} = \overline{3}(x^2 + (\overline{3})^{-1}\overline{4}x + \overline{1}) = \overline{3}(x^2 + \overline{6}x + \overline{1}) = \overline{3}(x^2 - x + \overline{1})$$
   Mas
   $$x^2 - x + \overline{1} = x^2 - \overline{2}x + \overline{1} + x = (x - \overline{1})^2 + x$$
   Usando Ex. 9, temos que $x = 3$ ou $x = 5$

12. Parecido do Ex. 9.

13. Temos que
   $$\overline{4}x^2 + \overline{6}x + \overline{1} = \overline{4}(x^2 + \overline{3} \cdot \overline{6}x + \overline{3} \cdot \overline{1}) = \overline{4}(x^2 + \overline{7}x + \overline{3}) = \overline{4}(x^2 - \overline{4}x + \overline{3})$$
   Agora
   $$x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = x^2 - \overline{4}x + \overline{4} - \overline{1} = (x - \overline{2})^2 - \overline{1}.$$
   Assim $x = 1$ ou $x = 10$.

14. Parecido do Ex. 13.

15. a) Temos que $\overline{3}x + \overline{5} = 0$, como $\overline{3}$ é invertivel em $\mathbb{Z}_8$, assim temos $x + \overline{3} \cdot \overline{5} = 0$ assim $x = -\overline{15} = \overline{1}$.

    b) $\overline{5} = 0$. Assim

    $$(\overline{2}x + \overline{3})^2 + (\overline{3}x + \overline{2})^2 + \overline{5}x = \overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{4} + \overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{4} = \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{3} = \overline{3}(x^2 + \overline{3}x + \overline{1}).$$

    Agora $x^2 + \overline{3}x + \overline{1} = 0$ implica que $x = 1$ em $\mathbb{Z}_5$.

    c) Temos que $\overline{2}x = \overline{5}$ não tem as soluções em $\mathbb{Z}_{12}$ pois mdc$(2, 12)$ não divide 5.

    d) Para todo x em $\mathbb{Z}_5$ temos $x^5 = x$, assim $x^{21} = x$ para todo x.

    e) $x \neq 0$.
    f) $x = 1$ ou $x = 3$

16. Temos que $9x = 6$ ou $4x = 1$, assim $x = 4$ em $\mathbb{Z}_5$. Portanto $y = 1$.
17. $x = 1, y = 1, z = 0$ ou $x = 1, y = 3, z = 2$.
18. a) $(\overline{97})^{-1} = \overline{19}$ em $\mathbb{Z}_{307}$;

    b) $(\overline{22})^{-1} = \overline{43}$ em $\mathbb{Z}_{105}$;