

Lista 5

Inteiros modulo m

1. Construa as tabelas de adição e de multiplicação de \mathbb{Z}_7 e \mathbb{Z}_{12} .
2. Busca os inversos dos seguintes elementos
 - a) $\overline{14}$ em \mathbb{Z}_{15} ;
 - b) $\overline{38}$ em \mathbb{Z}_{83} ;
 - c) $\overline{351}$ em \mathbb{Z}_{6669} ;
 - d) $\overline{91}$ em \mathbb{Z}_{2565} .
3. Em \mathbb{Z}_{20} determine
 - a) os menores representantes positivos de $\overline{-10}$ e $\overline{-6}$;
 - b) todos os divisores de zero;
 - c) todos os elementos inversos com seus inversos;
 - d) repete os itens b) e c) para \mathbb{Z}_{10} e \mathbb{Z}_{12} .
4. Determine os inversos multiplicativos de \overline{a} em \mathbb{Z}_n e, em seguida, resolva as equações de congruências reduzidas:
 - a) $a = 3, \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{10}$ e $3x \equiv 7 \pmod{10}$;
 - b) $a = 6, \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{35}$ e $6x - 2 \equiv 11 \pmod{35}$.
5. Sejam $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$ com $\text{mdc}(c, m) = 1$. Prove que $\overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c}$ implica que $\overline{a} = \overline{b}$.
6. Sejam p um primo e $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_p$. Prove que
 - a) $\overline{a}^p = \overline{a}$;
 - b) $(\overline{a} + \overline{b})^p = \overline{a} + \overline{b}$.
7. O elemento $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se **idempotente** se $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}$.
 - a) Busca todos idempotentes em \mathbb{Z}_6 e \mathbb{Z}_{12} .
 - b) Busca todos idempotentes em \mathbb{Z}_{10} e \mathbb{Z}_{30} .
 - c) Seja p um primo. Mostre que $\overline{0}, \overline{1}$ os únicos idempotentes em \mathbb{Z}_p .
8. O elemento $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se **nilpotente** se $\overline{a}^k = \overline{0}$ para algum k . Mostre que \mathbb{Z}_m não tem não-nulos nilpotentes se e só se m não tem fator primo em quadrado.
9. Em \mathbb{Z}_7 , busca os quadrados de todos elementos.
10. Busca os raízes em \mathbb{Z}_7 de $x^2 + x + \overline{1}$ por completar o quadrado e usando Exercício 9.
11. Busca os raízes em \mathbb{Z}_7 de $\overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{3}$ por completar o quadrado e usando Exercício 12.
12. Em \mathbb{Z}_{11} , busca os quadrados de todos elementos.
13. Busca os raízes em \mathbb{Z}_{11} de $\overline{4}x^2 + \overline{6}x + \overline{1}$ por completar o quadrado e usando Exercício 12.

14. Busca os raízes em \mathbb{Z}_{11} de $\overline{4}x^2 + \overline{6}x + \overline{8}$ por completar o quadrado e usando Exercício 12.

15. Resolva em \mathbb{Z}_m as equações abaixo:

a) $\overline{3}x + \overline{2} = \overline{6}x + \overline{7}, m = 8;$

b) $(\overline{2}x + \overline{3})^2 + (\overline{3}x + \overline{2})^2 + \overline{5}x = \overline{0}, m = 5;$

c) $\overline{4}x - \overline{7} + \overline{6}x + \overline{2} = \overline{3}x + \overline{5}x, m = 12;$

d) $x^{21} - x = \overline{0}, m = 5;$

e) $x^{12} - \overline{1} = \overline{0}, m = 5;$

f) $x^7 - x = \overline{0}, m = 4.$

16. Resolva em \mathbb{Z}_5 o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \overline{4}x + y = \overline{1} \\ x - \overline{2}y = \overline{4}. \end{cases}$$

17. Resolva em \mathbb{Z}_4 o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = \overline{0} \\ \overline{2}x + \overline{3}y + \overline{3}z = \overline{3} \\ x + y + \overline{3}z = \overline{0}. \end{cases}$$

18. Verifique se os elementos abaixo são inversíveis. Em caso afirmativo, determine o inverso.

a) $\overline{97}$ em $\mathbb{Z}_{307};$

a) $\overline{22}$ em $\mathbb{Z}_{105}.$