

Lista 2

Divisibilidade.

1. Mostre que um inteiro a é par se e somente se a^2 for par.
2. Mostre que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6 e que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24.
3. Mostre que $4 \nmid n^2 + 2$ para qualquer inteiro a .
4. Prove que se $a \in \mathbb{Z}$ assim $360 \mid a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$.
5. Seja a um inteiro. Mostre que
 - a) $a^2 - a$ é divisível por 2;
 - b) $a^3 - a$ é divisível por 6;
 - c) $a^5 - a$ é divisível por 30;
6. Mostre que todo inteiro do forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$, mas o contrario é falso.
7. Usando Algorithmo de Diviçãõ mostre que
 - a) todo inteiro impar é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$;
 - b) o quadrado de todo inteiro é do forma ou $3k$ ou $3k + 1$;
 - c) o cubo de todo inteiro é do forma $9k$ ou $9k + 1$ ou $9k + 8$.
8. Para $n \geq 1$ mostre que $n(n + 1)(2n + 1)/6$ é um inteiro. (*Dica:* Usando Algoritmo de Diviçãõ, n tem forma $6k$ ou $6k + 1$ ou... ou $6k + 5$. Mostre o resultado em todos os casos).
9. Verifique que se um inteiro n é o quadrado e o cubo simultaneamente (como em caso $64 = 8^2 = 4^3$), assim n é da forma $7k$ ou $7k + 1$.
10. Seja n um inteiro positivo. Prove por induçãõ que
 - a) $7 \mid 2^{3n} - 1$ e $8 \mid 3^{2n} + 7$.
 - b) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$.
11. Sejam x, y os inteiros impares. Mostre que $x^2 + y^2$ é par mas não divisivel por 4.
12. Busca todos n tais que $n^2 + 1$ é divisivel por $n + 1$.
13. Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ assim $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

Maximo divisor comum e minimo multiplo comum.

1. Para a não nulo mostre que $\text{mdc}(a, 0) = \text{mdc}(a, a) = |a|$ e $\text{mdc}(a, 1) = 1$.
2. Sejam a, b dois inteiros não-nulos. Mostre que $\text{mdc}(na, nb) = n\text{mdc}(a, b)$ e $\text{mmc}(na, nb) = n\text{mmc}(a, b)$ se n é um inteiro positivo.
3. Determine $\text{mdc}(a, b)$ e $\text{mmc}(a, b)$, para os inteiros a e b dados abaixo:
 - a) $a = 32$ e $b = 54$;
 - b) $a = 27$ e $b = 45$;
 - c) $a = 15$ e $b = 80$;
 - d) $a = 8798$ e $b = 2314$.
4. Utilize o algoritmo de Euclides para determinar inteiros r e s tais que $\text{mdc}(a, b) = ar + bs$.
 - a) $a = 56$ e $b = 72$;
 - b) $a = 24$ e $b = 138$.
 - c) $a = 119$ e $b = 272$.
 - d) $a = 1128$ e $b = 336$.
5. Para os inteiros não-nulos a e b , mostre que os seguintes condições são equivalentes
 - a) $a \mid b$;
 - b) $\text{mdc}(a, b) = |a|$;
 - c) $\text{mmc}(a, b) = |b|$.
6. Mercury leva 2111 horas para completar uma revolução do sol, enquanto Venus leva 5393 horas.
 - a) Quantas vezes o Sol, Mercúrio, Vênus e alinhar?
 - b) Com que frequência o Sol, Mercúrio, Vênus, a linha Terra e Netuno up?
7. Assumido que $\text{mdc}(a, b) = 1$, mostre o seguinte:
 - a) $\text{mdc}(a + b, a - b) = 1$ ou 2 . (Dica: Seja $d = \text{mdc}(a + b, a - b)$ e mostre que $d \mid 2a$, $d \mid 2b$; assim, $d \leq \text{mdc}(2a, 2b) = 2\text{mdc}(a, b)$);
 - b) $\text{mdc}(2a + b, a + 2b) = 1$ ou 3 ;
 - c) $\text{mdc}(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2 . (Dica: $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$.)
8. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a \mid b$ e $\text{mdc}(b, c) = 1$. Mostre que $\text{mdc}(a, c) = 1$.