

## Lista 2

### Divisibilidade.

1. Mostre que um inteiro  $a$  é par se e somente se  $a^2$  for par.
2. Mostre que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6 e que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24.
3. Mostre que  $4 \nmid n^2 + 2$  para qualquer inteiro  $a$ .
4. Prove que se  $a \in \mathbb{Z}$  assim  $360 \mid a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$ .
5. Seja  $a$  um inteiro. Mostre que
  - a)  $a^2 - a$  é divisível por 2;
  - b)  $a^3 - a$  é divisível por 6;
  - c)  $a^5 - a$  é divisível por 30;
6. Mostre que todo inteiro do forma  $6k + 5$  é também da forma  $3k + 2$ , mas o contrario é falso.
7. Usando Algorithmo de Diviçãõ mostre que
  - a) todo inteiro impar é da forma  $4k + 1$  ou  $4k + 3$ ;
  - b) o quadrado de todo inteiro é do forma ou  $3k$  ou  $3k + 1$ ;
  - c) o cubo de todo inteiro é do forma  $9k$  ou  $9k + 1$  ou  $9k + 8$ .
8. Para  $n \geq 1$  mostre que  $n(n + 1)(2n + 1)/6$  é um inteiro. (*Dica:* Usando Algoritmo de Diviçãõ,  $n$  tem forma  $6k$  ou  $6k + 1$  ou... ou  $6k + 5$ . Mostre o resultado em todos os casos).
9. Verifique que se um inteiro  $n$  é o quadrado e o cubo simultaneamente (como em caso  $64 = 8^2 = 4^3$ ), assim  $n$  é da forma  $7k$  ou  $7k + 1$ .
10. Seja  $n$  um inteiro positivo. Prove por induçãõ que
  - a)  $7 \mid 2^{3n} - 1$  e  $8 \mid 3^{2n} + 7$ .
  - b)  $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$ .
11. Sejam  $x, y$  os inteiros impares. Mostre que  $x^2 + y^2$  é par mas não divisivel por 4.
12. Busca todos  $n$  tais que  $n^2 + 1$  é divisivel por  $n + 1$ .
13. Mostre que se  $7 \mid a^2 + b^2$  assim  $7 \mid a$  e  $7 \mid b$ .

## Maximo divisor comum e minimo multiplo comum.

1. Para  $a$  não nulo mostre que  $\text{mdc}(a, 0) = \text{mdc}(a, a) = |a|$  e  $\text{mdc}(a, 1) = 1$ .
2. Sejam  $a, b$  dois inteiros não-nulos. Mostre que  $\text{mdc}(na, nb) = n\text{mdc}(a, b)$  e  $\text{mmc}(na, nb) = n\text{mmc}(a, b)$  se  $n$  é um inteiro positivo.
3. Determine  $\text{mdc}(a, b)$  e  $\text{mmc}(a, b)$ , para os inteiros  $a$  e  $b$  dados abaixo:
  - a)  $a = 32$  e  $b = 54$ ;
  - b)  $a = 27$  e  $b = 45$ ;
  - c)  $a = 15$  e  $b = 80$ ;
  - d)  $a = 8798$  e  $b = 2314$ .
4. Utilize o algoritmo de Euclides para determinar inteiros  $r$  e  $s$  tais que  $\text{mdc}(a, b) = ar + bs$ .
  - a)  $a = 56$  e  $b = 72$ ;
  - b)  $a = 24$  e  $b = 138$ .
  - c)  $a = 119$  e  $b = 272$ .
  - d)  $a = 1128$  e  $b = 336$ .
5. Para os inteiros não-nulos  $a$  e  $b$ , mostre que as seguintes condições são equivalentes
  - a)  $a \mid b$ ;
  - b)  $\text{mdc}(a, b) = |a|$ ;
  - c)  $\text{mmc}(a, b) = |b|$ .
6. Mercury leva 2111 horas para completar uma revolução do sol, enquanto Venus leva 5393 horas.
  - a) Quantas vezes o Sol, Mercúrio, Vênus e alinhar?
  - b) Com que frequência o Sol, Mercúrio, Vênus, a linha Terra e Netuno up?
7. Assumido que  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , mostre o seguinte:
  - a)  $\text{mdc}(a + b, a - b) = 1$  ou  $2$ . (Dica: Seja  $d = \text{mdc}(a + b, a - b)$  e mostre que  $d \mid 2a$ ,  $d \mid 2b$ ; assim,  $d \leq \text{mdc}(2a, 2b) = 2\text{mdc}(a, b)$ );
  - b)  $\text{mdc}(2a + b, a + 2b) = 1$  ou  $3$ ;
  - c)  $\text{mdc}(a + b, a^2 + b^2) = 1$  ou  $2$ . (Dica:  $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$ .)
8. Sejam  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tais que  $a \mid b$  e  $\text{mdc}(b, c) = 1$ . Mostre que  $\text{mdc}(a, c) = 1$ .