Gabarito Lista 1, Álgebra I

1. (a) Se $a \geq 0$, então $|a| = a \geq 0$.
   Se $a < 0$, então $|a| = -a \geq 0$.
   (b) Usando o mesmo raciocio do item anterior tem-se que $|a| \neq 0$ se, e somente se $a \neq 0$.
   (c) Basta considerar os dois casos $a \geq 0$ ou $a < 0$.
   (d) Se $a, b \geq 0$, logo $|a| = a$, $|b| = b$ e $|ab| = ab$, similarmente para $a, b < 0$.
   Se $a \geq 0, b < 0$, logo $|a| = a$, $|b| = -b$ e $|ab| = -ab$, similarmente para $a < 0, b \geq 0$.
   (e) Uma prova seria observar que $|a^2| = a^2$ e portanto

$$|a+b|^2 = |(a+b)^2| = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = |a|^2+2ab+|b|^2 \leq |a|^2+2|ab|+|b|^2 = |a|^2+2|a||b|+|b|^2$$

$$|a+b| \leq (|a|+|b|)^2$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

   (f) $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ logo $|a| - |b| \leq |a-b|$
   $|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a|$ logo $|b| - |a| \leq |a-b|$
   Agora, se $|a| - |b| \geq 0$ então

$$||a| - |b|| = |a| - |b| \leq |a-b|$$

   e se $|a| - |b| < 0$ então

$$||a| - |b|| = -|a| + |b| \leq |a-b|$$

2. Primeiro vejamos que $S_0 := \{m \in \mathbb{Z} | \ 0 < m < 1\}$ é vazio. Suponha que $\exists S_0$ e considere

$$y = \min S_0$$

   Mas notemos que como $0 < y < 1$, então $0 < y^2 < y < 1$ o qual contradiz a minimalidade de y.

   Agora seja $x \in S$, logo $x \in \mathbb{Z}$ e $7 < x < 8$ portanto logo $x - 7 \in \mathbb{Z}$ e $0 < x - 7 < 1$ ou seja, $x - 7 \in S_0$ o qual é absurdo.

3. Observe que $1, -1$ são elementos inversiveis e que 0 não é inversivel. Agora suponha que existe $a > 1$ em $\mathbb{Z}$ inversível, logo existe $a' > 1$ em $\mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$, portanto

$$0 < a < aa' = 1$$

   logo $a \in S_0$ o qual é absurdo.

4. Veja notas das aulas.

5. Veja notas das aulas.

6. (a) Para $n = 1$ é claro. Agora suponha que é valido para $n-1$, ou seja,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)(2(n-1)+1)n}{6}$$

vejamos que vale para n. De fato,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 &= \frac{(n-1)(2(n-1)+1)n}{6} + n^2 \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)n + 6n^2}{6} \\ &= \frac{(2n^2-3n+1)n + 6n^2}{6} \\ &= \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

(b) Similar ao item anteior.

(c) Para $n = 1$ é claro. Agora suponha que é valido para n, ou seja, $n^3 + 2n$ é divisivel por 3 e vejamos que vale para $n+1$. De fato,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3 \end{aligned}$$

(d) Para $n = 1$ é claro. Agora suponha que é valido para n, ou seja, $(1+h)^n \geq 1 + nh$ e vejamos que vale para $n+1$. De fato,

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$$

7. Uma primeira prova seria

$$\begin{aligned} a + (a+r) + \cdots + (a+(n-1)r) &= na + r + 2r + 3r + \cdots + (n-1)r \\ &= na + r(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= na + r\frac{(n-1)n}{2} \\ &= n\frac{2a + (n-1)r}{2} \end{aligned}$$

Uma segunda prova seria por indução e seria similar aos itens $(6.a)$ e $(6.b)$.

8. Vejamos que

$$P(n) = \frac{n! - 1}{n!}$$

Claramente é valido para $n = 2$, agora suponha que é valido para n, i.e., $P(n) = \frac{n!-1}{n!}$ e provemos para $n + 1$. De fato

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = P(n) + \frac{n}{(n+1)!} \\
&= \frac{n!-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n!-1)+n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n! - n + 1 + n}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)! + 1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

9. *Dica:* base da indução é triangulo. Para efetuar a passo da indução observe que dado um poligono com n vertices é possivel cortar ele obtendo um triangulo e um poligono com $n - 1$ vertices.

10. O caso $n = 1$ é conhecido. Agora suponha que vale para n, i.e., $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ e provemos para $n + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
z^{n+1} &= z^n z \\
&= \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= \rho^{n+1}(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= \rho^{n+1}(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + i(\cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta)) \\
&= \rho^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta))
\end{aligned}$$

11. (a) Provemos por indução sobre n.
    Por definição é valido para $n = 1$.
    Suponha que vale para n, i.e., $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e motremos para $n + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^{n+1} &= a^m \cdot a^n \cdot a \\
&= a^{m+n} \cdot a \\
&= a^{m+n+1}
\end{aligned}$$

    (b) Similar ao intem anterior.

12. *Dica:* Observar que
$$x^{n+1} - y^{n+1} = x(x^n - y^n) + y^n(x - y).$$
    Depois use indução.

13. (a) Provamos por indução. Base é facil. Supponha que
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-3} + x^{k-2} + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}.$$

Assim temos

$$
\begin{aligned}
1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-3} + x^{k-2} + x^{k-1} + x^k &= \frac{1-x^k}{1-x} + x^k \\
&= \frac{1 - x^k + x^k - x^{k+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{k+1}}{1-x}
\end{aligned}
$$

(b) Fazer do item anterior $x = 2$.

14. Para este exercício lembrar o binômio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

(a) Tomar no binômio de Newton $x = -1$ e $y = 1$.

(b) Note que

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (1+x)^n$$

Pelo binômio de Newton

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \right)$$

Agora observemos que em ambos lados da anterior igualdade temos polinômios de grau $2n$ na variavel x, portanto os coeficientes de x^k em cada lado são iguais. Assim que basta notar que da igualdades dos coeficientes de x^n temos

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

15. (a) Claramente é valido para $n = 1$.

Suponha para n, i.e., $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ e mostremos para $n + 1$. De fato

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! - 1 \\
&= (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}
$$

(b) Claramente é valido para $n = 1$.

Suponha para n, i.e., $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ e mostremos para $n+1$. De fato

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$