Lista 6

MAT5734/MAT0501 — 2° SEMESTRE DE 2017

Exercício 1.
Mostre que $\mathbb{Z}[i]$ é anel Noetheriano mas não é Artiniano.

Exercício 2.

(a) Mostre que $\begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ é Artiniano à direita mas não é Artiniano à esquerda.

(b) Mostre que $\begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$ é Artiniano à esquerda mas não é Artiniano à direita.

Exercício 3.
Seja F um corpo. Mostre que $F[x]$ é Noetheriano mas não é Artiniano.

Exercício 4.
Mostre que se $R[x]$ é Noetheriano, assim R é Noetheriano.

Exercício 5.
Seja R um anel. Mostre que R é Artiniano à esquerda (Noetheriano) se e somente se $M_n(R)$ é Artiniano à esquerda (Noetheriano).

Exercício 6.
Mostre que produtos finitos de anéis Artinianos (Noetherianos) é anel Artiniano (Noetheriano).

Exercício 7.
Mostre que um domínio com identidade é Artiniano à esquerda se e somente se é anel com divisão.

Exercício 8.
Mostre que anel comutativo R com identidade é Noetheriano se e somente se todo ideal primo I é finitamente gerado.

Exercício 9.
Seja I, J ideais em anel comutativo R. Mostre que se I é finitamente gerado e R/I, R/J são anéis Artinianos (Noetherianos), assim $R/(IJ)$ é Artiniano (Noetheriano).

Exercício 10.
Seja R um anel Artiniano comutativo. Mostre que todo ideal primo em R é maximal.

Exercício 11.
Seja R um anel Noetheriano. Mostre que $R[[x]]$ (anel das séries formais) é anel Noetheriano.

Exercício 12.
Seja M um R-módulo indecomponível de comprimento finito e seja f um endomorfismo de M. Prove que são equivalentes:

(a) f é isomorfismo.

(b) f é epimorfismo.

(c) f é monomorfismo.

(d) f não é nilpotente.

Exercício 13.
Sejam M, N R-módulos, $f : N \to M$ epimormismo, $g : N \to M$ monomorfismo. Mostre que f é isomorfismo se uma das seguintes condições vale

(a) N é Noetheriano, ou;

(b) R é comutativo e M é finitamente gerado.

Exercício 14.
Qualquer subanel de um anel semi-simples à esquerda é anel semi-simples à esquerda? Todo anel pode ser mergulhado num anel semi-simples à esquerda?

Exercício 15.
Seja $\{F_i\}_{i \in I}$ uma família de corpos. Mostre que $\prod_{i \in I} F_i$ é semi-simples se e somente se I é finito.

Exercício 16.
Descreva $\mathbb{Z}$-módulos semi-simples.

Exercício 17.
Seja $R = C[0, 1]$. R é semi-simples?

Exercício 18.
Seja R um anel semi-simples. Mostre que para todo ideal à direita I e todo ideal à esquerda J em R temos $I \cdot J = I \cap J$. Caso I, J e K são ideais em R mostre

(a) $I \cap (J + K) = I \cap J + I \cap K$.

(b) $I + (J \cap K) = (I + J) \cap (I + K)$.

Exercício 19.
Seja R um anel semi-simples à direita. Mostre que para $x, y \in R$ temos $Rx = Ry$ se e somente se $x = uy$ para alguma unidade $u \in R$.

Exercício 20.
Seja M um módulo semi-simples. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) M é finitamente gerado;

(b) M é Noetheriano;

(c) M é Artiniano;

(d) M é soma direta finita de módulos simples.