Lista 4

MAT5734/MAT0501 — 2º SEMESTRE DE 2017

Exercício 1.

Encontre um anel R e um R -módulo M tal que o conjunto dos elementos de torção de M não é um submódulo de M .

Exercício 2.

Seja M um módulo sobre DI. Suponha que $x \in \text{Tor}(M)$ não nulo. Mostre que x e 0 são “linearmente dependentes”. Assim mostre que o posto de $\text{Tor}(M)$ é 0 , e que o posto de M é igual ao posto de $M/\text{Tor}(M)$.

Exercício 3.

Seja M um módulo sobre DI.

- Suponha que M tem posto n e $x_1, \dots, x_n$ um conjunto maximal dos elementos l.i. em M . Seja $N = Rx_1 + \dots + Rx_n$ o submódulo de M gerado pelos $x_1, \dots, x_n$ mostre que N é isomorfo a R^n e M/N é módulo de torção.
- Mostre que se M contém um submódulo livre N de posto n , tal que M/N é módulo de torção, assim M tem posto n .

Exercício 4.

Seja R um DI e sejam N, M os R -módulos com postos m, n . Mostre que o posto de $N \oplus M = m + n$.

Exercício 5.

Seja $R = \mathbb{Z}[x]$.

- Mostre que R não é um DIP.
- Seja $M = (2, x)$ ideal em R . Mostre que $\{2, x\}$ não é basis de M . Mostre que o posto de M é 1 , mas M não é livre com posto 1 .
- Mostre que M não é soma dos módulos cíclicos.

Exercício 6.

Seja R um DI.

- Seja N um submódulo de um R -módulo M . Prove que $\text{Tor}(N) = N \cap \text{Tor}(M)$.
- Mostre que o ideal pR é primo se, e somente se, p é um elemento primo de R .

Exercício 7.

Prove que um DI R é um DIP se, e somente se, todo submódulo de um R -módulo cíclico é cíclico.

Exercício 8.

Seja R um DIP e seja $p \in R$ não-nulo. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) p é primo.
- (b) p é irredutível.
- (c) pR é um ideal maximal de R .
- (d) R/pR é um corpo.
- (e) R/pR é um DI.

Exercício 9.

Seja R um DIP e sejam $a, b \in R$ com $\text{mdc}(a, b) = 1$. Mostre que

$$R/R(ab) \cong R/R(a) \oplus R/R(b).$$

Exercício 10.

Seja R um DI e M ideal nonprincipal em R . Mostre que M é livre de torção de posto 1 mas não é livre.

Exercício 11.

Seja R um anel qualquer. Sejam $A_1, \dots, A_m$ os R -módulos e B_i os submódulos em A_i . Mostre que

$$(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m)/(B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_m) \cong (A_1/B_1) \oplus (A_2/B_2) \oplus \dots \oplus (A_m/B_m).$$

Exercício 12.

Seja R um DIP, seja B um módulo de torção e seja p um primo em R . Mostre que se $pb = 0$ para algum $b \in B$, assim $\text{Ann}(B) \subseteq (p)$.

Exercício 13.

Dê um exemplo de DI R e um R -módulo de torção não-nulo M tal que $\text{Ann}(M) = 0$. Mostre que se N é um R -módulo de torção finitamente gerado, assim $\text{Ann}(N) \neq 0$.

Exercício 14.

Seja R um DIP, seja $a \in R$ não-nulo, e $M = R/(a)$. Para todo primo $p \in R$ mostre que

$$p^{k-1}M/p^kM \cong \begin{cases} R/(p) & k \leq n, \\ 0 & k > n, \end{cases}$$

com n é potência de p que divide a em R .

Exercício 15.

Sejam R um DIP, p um primo em R .

- (a) Seja M um R modulo finitamente gerado. Usando Ex. 14 mostre que

$$p^{k-1}M/p^kM \cong F^{n_k},$$

onde F é corpo $R/(p)$ e n_k o número dos divisores elementares de M que são potências p^α , com $\alpha \geq k$.

- (b) Suponha que M_1, M_2 são finitamente gerados, isomorfos R -modulos. Usando (a) mostre que para todo $k \geq 0$, os modulos M_1, M_2 tem o mesmo número dos divisores elementares p^α com $\alpha \geq k$.

Exercício 16.

Seja R um DIP, e M um R -modulo de torção. Mostre que M é irredutível se, e somente se $M = Rm$ para todo elemento não-nulo $m \in M$, com aniquilador de m é ideal primo não-nulo (p) .

Exercício 17.

Mostre que um modulo finitamente gerado sobre R é projetivo se, e somente se R é livre.

Exercício 18.

Seja R um DIP não corpo. Mostre que R não possui modulos injetivos finitamente gerados.

Exercício 19.

Durante as aulas nós mostramos que se R é um DIP assim todo R -modulo finitamente gerado sem torção é livre.

- (a) Mostre que a hipótese do modulo ser finitamente gerado é essencial.
 (b) Mostre que a hipótese de R ser um DIP é essencial.

Exercício 20.

Durante as aulas nós mostramos que se R é um DIP e M é um R -modulo finitamente gerado, então $\text{Tor}(M)$ é somando direto de M .

- (a) Mostre que a hipótese de R ser um DIP é essencial, isto é, encontre um DI R e um R -modulo M finitamente gerado tal que $\text{Tor}(M)$ não seja somando direto de M ;
 (b) Mostre que a hipótese de M ser finitamente gerado é essencial, isto é, encontre, por exemplo, um $\mathbb{Z}$ -modulo M tal que $\text{Tor}(M)$ não é somando direto de M .

Exercício 21.

Determine a estrutura de $\mathbb{Z}$ -modulo $\mathbb{Z}^3/K$ com K gerado por $v_1 = (2, 1 - 3), v_2 = (1, -1, 2)$.

Exercício 22.

Descreva todos grupos abelianos de ordem 234 e de ordem 72.

Exercício 23.

Seja $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ (anel dos inteiros Gaussianos). Descreva a estrutura do D^3/K com K gerado pelos $v_1 = (1, 3, 6)$, $v_2 = (2 + 3i, -3i, 12 - 18i)$, $v_3 = (2 - 3i, 6 + 9i, -18i)$.

Exercício 24.

Seja R um DI e M um R -modulo. Um submodulo N de M é chamado *puro* se para todo $y \in N$ e $a \in R$, a equação $ax = y$ tem solução em M se, e somente se, tem solução em N . Mostre que se N é um somando direto de M então N é puro. Mostre que se N é puro e $\text{Ann}(x + N) = R$, então existe $y \in M$ tal que $x + N = y + N$ e $\text{Ann}(y) = R$.

Exercício 25.

Mostre que se N é submodulo puro de um modulo M finitamente gerado sobre DIP, assim N é somando direto de M .