Lista 3

MAT5734/MAT0501 — 2° SEMESTRE DE 2017

Seja R um anel com $1 \neq 0$. Todos os módulos M são módulos sobre R à esquerda.

Exercício 1.
Sejam I, J são ideais num anel comutativo R.

a) Mosre que existe sequencia exata curta (de R-modulos):

$$0 \longrightarrow I \cap J \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow I + J \longrightarrow 0$$

b) Usando item a) mostre que existe sequencia exata curta

$$0 \longrightarrow R/(I \cap J) \longrightarrow R/I \oplus R/J \longrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0$$

C) Encontre os exemplos quando sequencias a) e b) não cinde.

Exercício 2.
Mostre que um R-module M é finitamente gerado se e somente se existe sequencia exata

$$R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 3.
Seja dada sequencia exata curta (de R-modulos).

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

Mostre que os seguintes condições são equivalentes:

a) Existe homomorfismo $\beta : M_3 \to M_2$ tal que $g \circ \beta = \mathrm{id}_{M_3}$.

b) Existe homomorfismo $\alpha : M_3 \to M_2$ tal que $\alpha \circ f = \mathrm{id}_{M_1}$.

Exercício 4.
No diagrama abaixo a linha e a coluna são exatas. Mostre que se $t \circ f : M_1 \to L_2$ é isomorfismo, então $g \circ h : M_2 \to L_1$ é isomorpfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & M_2 \arrow[d, "h"] & & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & L_1 \arrow[r] & 0 \\
 & & L_2 \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Exercício 5.
(Lema dos cinco) Considere a seguinte diagrama comutativa de homomorsmos de R-modulos a direita com as linhas exatas.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

a) Se h_2 e h_4 são sobrejetores e h_5 injetora, mostre que h_3 é sobrejetora.

b) Se h_2 e h_4 são injetores e h_1 é sobrejetor, mostre que h_3 é injetor.

c) Se h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos, mostre que h_3 e um isomorfismo.

Exercício 6.
Sejam P_1, P_2 os R-modulos. Mostre que $P_1 \oplus P_2$ é projetivo se e somente se P_1 e P_2 são projetivos.

Exercício 7.
Sejam Q_1, Q_2 os R-modulos. Mostre que $Q_1 \oplus Q_2$ é injetivo se e somente se Q_1 e Q_2 são injetivos.

Exercício 8.
Mostre que as seguntes condições são equivalentes para um anel R.

a) Todo R-modulo é projetivo.

b) Todo R-modulo é injetivo.

Exercício 9.
Mostre que $\mathbb{Q}$ não é projetivo como $\mathbb{Z}$-modulo.

Exercício 10.
Mostre que qualquer $\mathbb{Z}_6$-modulo é projetivo e injetivo. Encontre um exemplo de $\mathbb{Z}_4$-modulo que não é projetivo nem injetivo.

Exercício 11.
Sejam $a_1, \dots, a_n$ os elementos de um anel comutativo R que geram ideal R. Mostre que submodulo M em R^n que consiste de todas as n-tuplas $(x_1, \dots, x_n)$ tais que $\sum_{i=i}^n a_i x_i = 0$ é projetivo.

Exercício 12.
Seja A um grupo finito abeliano.

a) Mostre que A não é $\mathbb{Z}$-modulo projetivo.

b) Mostre que A não é $\mathbb{Z}$-modulo injetivo.

Exercício 13.
Mostre que $\mathbb{Z}_n$ é projetivo e injetivo como $\mathbb{Z}_n$-modulo.

Exercício 14.
Sejam A, B_i os R-modulos. Mostre:

a) $\mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I} B_i, A) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(B_i, A)$.

b) $\mathrm{Hom}_R(A, \prod_{i\in I} B_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(A, B_i)$.

Exercício 15.
Sejam M, A, B os R-modulos.

a) Sejam $f : A \to M$, $g : B \to M$ os homomorfismos. Mostre que $X = \{(a, b) | a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$ é um R-submodulo do $A \oplus B$ (chamado *pullback*) e mostre que existe diagrama comutativa

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_2} & B \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

com p_1, p_2 projeções naturais.

b) Sejam $f' : M \to A$, $g : M' \to B$ os homomorfismos. Mostre que o quociente Y do $A \oplus B$ defino pelo $\{(f(m), -g(m)) | m \in M\}$ é um R-modulo do $A \oplus B$ (chamado *pushout*) e mostre que existe diagrama comutativa

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "p_2'"] \\ A \arrow[r, "p_1'"] & Y \end{tikzcd}$$

com p_1, p_2 são componentes de homomorfismo natural.

Exercício 16.

a) Se

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \xrightarrow{f'} M \longrightarrow 0$$

são sequencias exatas dos R-modulos com P, P' projetivos, mostre que $P \oplus K' \equiv P' \oplus K$ como R-modulos.

b) Se

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q' \xrightarrow{g'} L' \longrightarrow 0$$

são sequencias exatas dos R-modulos com Q, Q' injetivos, mostre que $Q \oplus L' \equiv Q' \oplus L$ como R-modulos.

Exercício 17.
Seja R um anel comutativo. Verdadeiro ou falso? O que acontece se $R = \mathbb{Z}$?

a) Qualquer submodulo do R-modulo projetivo é projetivo.

b) Qualquer submodulo do R-modulo injetivo é injetivo.

c) Qualquer quociente do R-modulo projetivo é projetivo.

d) Qualquer quociente do R-modulo injetivo é injetivo.