Lista 2

MAT5734/MAT0501 — 2° SEMESTRE DE 2017

Seja R um anel com $1 \neq 0$. Todos os módulos M são módulos sobre R à esquerda.

Exercício 1.
Mostre que $0m = 0$ e $(-1)m = -m$ para todos $m \in M$.

Exercício 2.
Suponha que $am = 0$ para algum $a \in R$ e algum $m \in M$ com $m \neq 0$. Mostre que a não tem o inverso a esquerda (i.e., não existe $b \in R$ tal que $ba = 1$)..

Exercício 3.
Seja $M = R^n$, e seja $I_1, I_2, \dots, I_n$ os ideais de R. Mostre que os seguintes conjuntos são R-modulos.

(a) $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in I_i\}$

(b) $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$

Exercício 4.
Para todo ideal I em R define

$$IM = \{i_1 m_1 + \cdots + i_k m_k \mid i_j \in I, m_j \in M\}$$

o conjunto de todas as somas finitas de elementos da forma im com $i \in I$ e $m \in M$. Mostre que IM é um submodulo em M.

Exercício 5.
Mostre que o interseção de qualquer coleção doas submodulos de um R-modulo é um submodulo.

Exercício 6.
Sejam $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ é cadeia dos submodulos em M. Mostre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ é um submodulo em M.

Exercício 7.
Se N é um submodulo de M, o *aniquilador* de N em R definido como

$$\{a \in R \mid an = 0 \text{ para todos } n \in N\}.$$

Mostre que o aniquilador de N em R é um ideal.

Exercício 8.
Se I é um ideal de R, o *aniquilador* de I em M definido como

$$\{m \in M \mid im = 0 \text{ para todos } i \in I\}.$$

Mostre que o aniquilador de I em M é um submodulo.

Exercício 9.
Seja M é um grupo abeliano, i.e. um $\mathbb{Z}$-modulo. Podemos extender o ação de $\mathbb{Z}$ para receber um $\mathbb{Q}$-modulo?

Exercício 10.
Sejam $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$.

(a) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação por ângulo $\pi/2$. Mostre que V e 0 são unicos $F[x]$-submodulos para este T;

(b) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um projeção para eixo-y. Mostre que V, 0, eixo-x, eixo-y são unicos $F[x]$-submodulos para este T.

(c) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação por ângulo π. Mostre que qualquer subespaço de V é um $F[x]$-submodulo para este T;

Exercício 11.
Mostre que o núcleo e a imagem de um homomorfismo entre R-modulos são submodulos.

Exercício 12.
Sejam A qualquer $\mathbb{Z}$-modulo, a um elemento de A e n um inteiro positivo. Mostre que a aplicação $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A$ dado pelo $\varphi(\bar{k}) = ka$ é um homomorfismo entre $\mathbb{Z}$-modulos se e somente se $na = 0$. Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong A_n$, onde $A_n = \{a \in A \mid na = 0\}$ (i.e. A_n é aniquilador em A do ideal (n) de $\mathbb{Z}$).

Exercício 13.
Descreva todos $\mathbb{Z}$-modulo homomorfismos de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ao $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Exercício 14.
Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n, m)\mathbb{Z}$.

Exercício 15.
Seja R um anel comutativo. Mostre que $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ e M são isomorfos como R-modulos. [*Dica:* Mostre que q.q. elemento em $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ determina-se pelo seu valor em 1].

Exercício 16.
Seja R um anel comutativo. Mostre que $\mathrm{Hom}_R(R, R)$ e R são isomorfos como anéis.

Exercício 17.
Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ os R-modulos, e B_i os submodulos em A_i. Mostre que

$$(A_1 \times \cdots \times A_n)/(B_1 \times \dots B_n) \cong (A_1/B_1) \times \cdots \times (A_n/B_n).$$

Exercício 18.
Seja I ideal à esquerda de R e n um inteiro positivo. Mostre

$$R^n/IR^n \cong R/IR \times \ldots R/IR \quad \text{(n vezes)}.$$

Exercício 19.
Seja I um ideal nilpotente num anel comutativo R. Sejam M,N são R-modulos e $\varphi : M \to N$ um homomorfismo dos R-modulos. Mostre que se a aplicação induzida $\bar{\varphi} : M/IM \to N/IN$ é sobrejetiva assim φ é sobrejetiva.

Exercício 20.
Mostre que se os conjuntos X e Y tem a mesma cardinalidade, assim os módulos livres $F(X)$ e $F(Y)$ são isomorfos.

Exercício 21.
Suponha que R um anel comutativo. Mostre que $R^n \cong R^m$ se e somente se $n = m$. [*Dica:* Aplica o Exer. 18 com I ideal maximal de R].

Exercício 22.
Seja N um submodulo de M. Mostre que se ambos M/N e N são finitamente gerados assim M é finitamente gerado.

Exercício 23.
Um R-modulo M é chamado *irredutível* se $M \neq 0$ e se 0 e M são únicos submodulos de M. Mostre que $M \neq 0$ é irredutível se e somente se $M \neq 0$ e M é um modulo cíclico. Descreva todos $\mathbb{Z}$-modulos irredutíveis.

Exercício 24.
Mostre que se M_1, M_2 são modulos irredutíveis assim qualquer homomorfismo não nulo entre eles é isomorfismo. Mostre que isso implica que $\mathrm{End}_R(M)$ é um anel com divisão.[*Dica:* Considere núcleo e imagem]. (o resultado acima chama-se *Lema de Schur*).

Exercício 25.
Seja R um anel comutativo, e N, M, L os R-modulos. Mostre os seguintes isomorfismos dos R-modulos:

a) $\mathrm{Hom}_R(N \times L, M) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M) \times \mathrm{Hom}_R(L, M)$.

b) $\mathrm{Hom}_R(M, N \times L) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N) \times \mathrm{Hom}_R(M, L)$.

Exercício 26.
Seja R um anel comutativo e F um modulo livre de posto finito. Mostre o seguinte isomorfismo dos R-modulos $\mathrm{Hom}_R(F, R) \cong F$.

Exercício 27.
Seja R um anel comutativo e seja F um modulo livre de posto n. Mostre que $\mathrm{Hom}_R(F, M) \cong M \times \cdots \times M$ (n vezes). [Dica: Use Exercícios 15 e 26].

Exercício 28.
Para todo ideal I de M seja IM definido como em Exercicio 4. Sejam $J_1, \dots, J_k$ os ideais em R. Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned} M &\to M/J_1M \times \dots M/J_kM \\ m &\mapsto (m + J_1M, \dots, m + J_kM), \end{aligned}$$

é um homomorfismo dos R-modulos com núcleo $J_1M \cap \cdots \cap J_kM$.

Exercício 29.
Em notação do Exercício acima, suponha que os ideais $J_1, \dots, J_k$ são comaximais (i.e., $J_i + J_m = R$, se $i \neq m$). Mostre que

$$M/(J_1 \dots J_k)M \cong M/J_1M \times \cdots \times M/J_kM.$$

[*Dica:* Segue a prova do Teorema Chinês do Resto para anéis].

Exercício 30.
Sejam M um $\mathbb{Z}$-modulo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots$, e $R = \mathrm{End}_R(M)$. Define $\varphi_1, \varphi_2 \in R$ pelo

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_1, a_2, a_3, \dots) &= (a_1, a_3, a_5, \dots) \\ \varphi_2(a_1, a_2, a_3, \dots) &= (a_2, a_4, a_6, \dots) \end{aligned}$$

(a) Mostre que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é base livre do R-modulo R.

(b) Use (a) para provar que $R \cong R^2$.